

Axisymmetric Poroelastic FE Modeling of Intervertebral Disc for Investigation of Lumbar Spine Biomechanics

M. Nikkhoo¹, M. Haghpanahi^{2*}, J. L. Wang³, M. Parnianpour⁴

¹ Ph.D Candidate, Biomechanics Research Lab, Faculty of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran, m_nikkhoo@iust.ac.ir

Institute of Biomedical Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, c99548301@ntu.edu.tw

² Associate professor, Biomechanics Research Lab, Faculty of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

³ Professor, Institute of Biomedical Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, jlwang@ntu.edu.tw

⁴ Professor, Industrial and Management Engineering Department, Hanyang University, Ansan, South Korea
Biomechanics Research Lab, Faculty of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran,
parnianpour@yahoo.com

Abstract

Prediction of the relationship between different types of mechanical loading and the failure of the intervertebral disc is so important to identify the risk factors which are difficult to study *in vivo* and *in vitro*. On the basis of finite element methods some of these issues may be overcome enabling more detailed assessment of the biomechanical behavior of the intervertebral disc. The objective of this paper is to develop a nonlinear axisymmetric poroelastic finite element model of lumbar motion segment and show its capability for studying the time-dependent response of disc. After comparison of the response of different models in quasi-static analysis, the poroelastic model of intervertebral disc is presented and the results of short-term, long-term creep tests and cyclic loading were investigated. The results of the poroelastic model are in agreement with experimental ones reported in the literature. Hence, this model can be used to study how different dynamic loading regimes are important as risk factors for initiation of intervertebral disc degeneration.

Keywords: Spine; Finite Element; Intervertebral Disc; Porous Media Theory; Time-Dependent Response

* Corresponding author

Address: Mohammad Haghpanahi, Biomechanics Research Lab, Faculty of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, IUST St., Hengam Ave., Resalat Sq., Tehran, Iran

Tel: +98 21 77240540, +98 9123189581

Fax: +98 21 77240488

E-mail: mhaghpanahi@iust.ac.ir

مدلسازی المان محدود تقارن محوری پروالاستیک دیسک بین مهره‌ای برای بررسی رفتار بیومکانیکی ستون فقرات کمری

محمد نیکخواه^۱، محمد حق پناهی^{۲*}، جا لین وانگ^۳، محمد پرنیان پور^۴

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

انستیتو مهندسی پزشکی، دانشگاه ملی تایوان، تایپه، تایوان

m_nikkhoo@iust.ac.ir, c99548301@ntu.edu.tw

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

^۳ استاد، انستیتو مهندسی پزشکی، دانشگاه ملی تایوان، تایپه، تایوان jlwang@ntu.edu.tw

^۴ استاد، دانشکده مهندسی صنایع و مدیریت، دانشگاه هنیانگ، انسان، کره جنوبی،

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران parnianpour@yahoo.com

چکیده

پیش‌بینی نحوه ارتباط انواع بارهای مکانیکی با ضایعات دیسک بین مهره‌ای-که برای شناسایی عوامل ریسک بسیار مهم است- صرفاً با انجام آزمایش بر روی موجودات زنده یا بر روی نمونه‌های جسد انسان بسیار مشکل است. روش‌های المان محدود می‌تواند راه‌حل مناسبی در مطالعات یاد شده محسوب شود و رفتار بیومکانیکی دقیق‌تری را از دیسک حاصل کند. لذا هدف اصلی این مقاله، استخراج مدل المان محدود تقارن محوری پروالاستیک غیرخطی یک بخش حرکتی ناحیه کمری ستون فقرات است تا بتوان بر مبنای آن به مطالعه رفتار بیومکانیکی وابسته به زمان آن پرداخت. پس از مقایسه نتایج مدل‌های رفتاری مختلف در تحلیل شبه استاتیک و تشریح مدل پروالاستیک، نتایج بارگذاری‌های خزش کوتاه‌مدت، خزش بلند مدت و بارگذاری‌های چرخه‌ای ارزیابی شده است. تطابق مناسب نتایج با یافته‌های آزمایشگاهی موجود در منابع تحقیق مبین صحت پیش‌بینی مدل در ارائه رفتار بیومکانیکی وابسته به زمان یک بخش حرکتی است. بنابراین بر پایه این مدل صحنه‌گذاری شده، می‌توان به مطالعه نقش بارگذاری‌های دینامیکی مختلف به عنوان عوامل ریسک در شروع فرایند تخریب دیسک بین مهره‌ای پرداخت.

کلیدواژگان: ستون فقرات، المان محدود، دیسک بین مهره‌ای، تئوری محیط‌های متخلخل، رفتار وابسته به زمان

*عهده‌دار مکاتبات

نشانی: تهران، میدان رسالت، خیابان هنگام، خیابان دانشگاه علم و صنعت، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، آزمایشگاه تحقیقاتی بیومکانیک، کدپستی:

۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶

تلفن: ۰۲۱۷۷۲۴۰۵۴۰، ۰۹۱۲۳۱۸۹۵۸۱، دورنگار: ۰۲۱۷۷۲۴۰۴۸۸، پیام‌نگار: mhaghpanahi@iust.ac.ir

۱- مقدمه

با توجه به شایع بودن دردهای ناحیه کمری در سنین ۲۵ تا ۶۵ سالگی و تحمیل هزینه‌های گزاف اجتماعی، انجام تحقیقات بالینی با هدف پیش‌گیری و درمان این عارضه از اولویتهای نخست پژوهشهای ملی محسوب می‌شود. گستردگی ضایعات دیسکی به عنوان یکی از مهمترین عوامل دردهای یاد شده، محققان علوم پزشکی و مهندسی پزشکی را بر آن داشته تا با بررسی‌های دقیق ماکروسکوپی و میکروسکوپی، زمینه‌های پیشگیری و درمان را فراهم کنند [۱]. مرحله نخست این زمینه تحقیقاتی گسترده، شناخت صحیح و دقیق از ساختار، عملکرد، روند آسیب‌های جزئی و کلی و همچنین یافتن عوامل اصلی این آسیب‌ها برای رعایت پیشگیری‌های لازم در محیط‌ها و پرهیز از انجام حرکات خطرناک است. گام بعدی یافتن روشهای درمانی برپایه تحقیقات اولیه و شناخت صحیح ساختار، عملکرد و روند آسیب‌ها است. این مسأله شاید بیش از سه دهه تعداد زیادی از پژوهشهای گروه‌های مختلف جهانی را به خود اختصاص داده است. مطالعه ضایعات دیسک بین مهره‌ای ناشی از تنشهای مکانیکی و بررسی نقش رژیمهای مختلف بارگذاری دینامیکی صرفاً با انجام آزمایش بر روی موجود زنده یا بر روی نمونه‌های جسد انسان بسیار مشکل است. به همین منظور مدلسازی و شبیه‌سازی‌های عددی صحنه‌گذاری شده می‌تواند راه‌حل مناسبی در مطالعات یاد شده، باشد. لذا در سی سال اخیر تعداد زیادی از گروه‌های تحقیقاتی هسته اصلی فعالیتهای خود را به بررسی بخشی از زمینه‌های مطالعات بیومکانیک و مدلسازی دیسکهای بین مهره‌ای معطوف کرده‌اند. اولین تلاشها برای مدلسازی المان محدود بخش حرکتی ستون فقرات، بیش از سه دهه قبل و با مدل‌های بسیار ساده الاستیک آغاز شده است [۲]. همچنین رفتار وابسته به زمان دیسک بین مهره‌ای در برخی مدلسازی‌ها با مدل رفتاری ویسکوالاستیک شبیه‌سازی شده است [۳، ۴]. این در حالی است که بسیاری از یافته‌های آزمایش‌ها، بیان کرده‌اند که برای شبیه‌سازی شرایط واقعی بافتهای نرم به

خصوص غضروف‌ها و دیسکهای بین مهره‌ای، ترکیبی از دو فاز سیال و جامد می‌تواند در مدلسازی مفید واقع شود. برای مثال وقتی دیسک بین مهره‌ای فشرده می‌شود، سیال از داخل آن خارج می‌شود و به خوبی بیانگر این پدیده است. بنابراین مشخص است که سیستم دیسکهای بین مهره‌ای باید به صورت یک سیستم چند فازی در نظر گرفته شود. تعدادی از محققان در مدلسازی بافتهای نرم از جمله غضروفها و دیسک بین مهره‌ای، از تئوری محیط‌های متخلخل بهره‌برده‌اند [۵].

تئوری پروالاستیک را- که برگرفته از نظریه بایوت^۱ در سال ۱۹۴۱ است- اولین بار سایمون و همکارانش [۶] در سال ۱۹۸۵ برای مدلسازی دیسک‌های بین مهره‌ای استفاده کردند که در آن از قانون داری برای استخراج تعادل دینامیکی استفاده شده بود. این مدل در ادامه در تحقیقات گروه‌های مختلفی نظیر شیرازی عدل و همکاران [۷]، وو و همکاران [۸]، لی و همکاران [۹]، لیبیل و همکاران [۱۰]، یاترادیس و همکاران [۱۱]، ناتاراجان و همکاران [۱۲]، اهلرز و همکاران [۱۳] و اشمیت و همکاران [۱۴] تعمیم داده شد. با وجود این تعداد کمی از تحقیقات انجام شده، رفتار ریزساختاری دیسک را با مدل پروالاستیک در قبال بارگذاری‌های دینامیکی بررسی کرده‌اند. این در حالی است که مدل‌های ارائه شده با بارگذاری‌های مختلف صحنه‌گذاری نشده‌اند و نتایج تنها در بارگذاری‌های خاص به دست آمده‌اند. از طرفی رفتار وابسته به زمان دیسک بین مهره‌ای در قبال بارگذاری‌های چرخه‌ای در توجیه ضایعات مشاهده شده نیز، چندان بررسی نشده است.

لذا هدف اصلی این مقاله استخراج یک مدل پروالاستیک غیرخطی و صحنه‌گذاری آن در قبال بارگذاری‌های مختلف است تا بر پایه آن بتوان رفتار وابسته به زمان ستون فقرات را پیش‌بینی کرد و به تبع آن به مطالعه نقش بارگذاری‌های دینامیکی مختلف به عنوان عوامل ریسک در شروع فرایند تخریب دیسک بین مهره‌ای پرداخت.

^۱Biot^۳Lee et al^۹Ehlers et al.^۲Simon et al.^۶Laible et al.^{۱۰}Schmidt et al.^۴Shirazi-Adl et al.^۷Iatridis et al.^۸Wu et al.^۵Natarajan et al.

۲- مدل‌سازی المان محدود

دیسک بین مهره‌ای یک بافت نرم هیدراته است که ساختاری متخلخل اشباع شده با سیال دارد. لذا برای در نظر گرفتن شرایط واقعی این بافت نرم تأثیر دو فاز سیال و جامد باید در مدل‌سازی اعمال شود. تئوری پروالاستیک بر پایه اصول مکانیک محیط‌های پیوسته، می‌تواند به تحلیل ماتریس الاستیکی بپردازد که با سیال داخل حفرات اشباع شده است. در محیط‌های متخلخل متناسب با تغییر فرم فاز جامد، حرکت نسبی در فاز سیال به وجود می‌آید. لذا سه رابطه اصلی مورد استفاده در این تئوری عبارت از روابط بقای اندازه حرکت برای فاز جامد (رابطه ۱) و فاز سیال (رابطه ۲) و رابطه داریسی (رابطه ۳) است.

$$(1-n)\nabla^T \sigma_s + (1-n)\rho_s \mathbf{b} + \mathbf{k}^{-1}n\mathbf{q} - (1-n)\rho_s \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (1)$$

$$n\nabla p + n\rho_f \mathbf{b} - \mathbf{k}^{-1}n\mathbf{q} - n\rho_f \dot{\mathbf{v}}_f = 0 \quad (2)$$

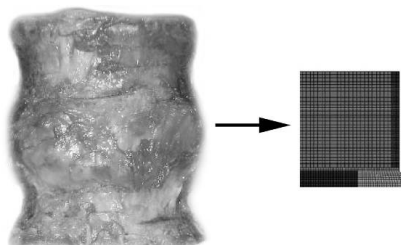
$$\mathbf{q} = n(\mathbf{v}_f - \dot{\mathbf{u}}) \quad (3)$$

که در آنها σ_s تنش در فاز جامد، n ضریب تخلخل، k ضریب نفوذپذیری، ρ_s چگالی فاز جامد، \mathbf{b} نیروی بدنی در واحد جرم، $\ddot{\mathbf{u}}$ شتاب فاز جامد، p فشار سیالی تخلخل‌ها^{۱۱}، ρ_f چگالی فاز سیال، $\dot{\mathbf{v}}_f$ شتاب فاز سیال، \mathbf{v}_f سرعت فاز سیال و \mathbf{q} سرعت داریسی را نشان می‌دهند. با استفاده از روش باقی‌مانده وزنی گلرکین^{۱۲} و با در نظر گرفتن چهار متغیر گره-ای (سه درجه آزادی جابجایی و فشار تخلخل) از معادلات، ماتریسهای سختی استخراج می‌شوند و رابطه حاکم بر مدل المان محدود پروالاستیک به شکل ماتریس رابطه (۴) در می‌آید. نحوه استخراج این روابط و جزئیات هر جمله ماتریس به تفصیل در ضمیمه آمده است.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{PU} & \mathbf{C}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU} & \mathbf{K}_{UP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_U \\ \mathbf{F}_P \end{bmatrix} \quad (4)$$

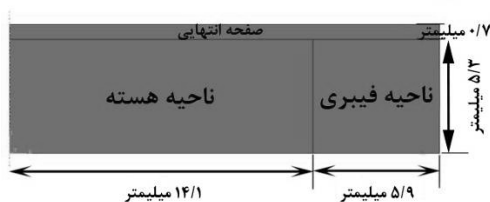
برای حل عددی از نرم‌افزار تجاری اباکوس^{۱۳} ویرایش ۹-۶ استفاده شده است.

با توجه به مطالعه تصاویر سی تی اسکن ناحیه کمر و همچنین مرور مراجع موجود در مورد آناتومی دیسک بین مهره‌ای ناحیه کمر، ابعاد هندسی مدل مطابق با هندسه تقریبی دیسک L4-L5 در نظر گرفته شد. ارتفاع دیسک مستقیماً و شعاع آن با ساده‌سازی مدل به صورت یک استوانه، از مساحت میانگین دیسک بین مهره‌ای استخراج شد. با توجه به تقارن هندسی شکل نسبت به صفحه عرضی^{۱۴} نصف جزء حرکتی مدل‌سازی شد. شکل‌های شماره (۱) و (۲) به ترتیب طرح کلی مدل و ابعاد هندسی دیسک بین مهره‌ای را نشان می‌دهند.



شکل (۱)- طرح کلی مدل برگرفته از آناتومی جزء

حرکتی ناحیه کمر



شکل (۲)- مدل هندسی تقارن محوری دیسک L4-L5

چنانچه اشاره شد، در مدل تقارن محوری بنابه تقارن هندسی نیمی از دیسک بین مهره‌ای مدل‌سازی شد. لذا شرایط مرزی به این صورت تعریف شد که جابجایی محوری و جریان سیال نسبت به صفحه عرضی وجود ندارد. همچنین بین مرز ناحیه هسته، ناحیه فیبری و صفحه انتهایی جریان آزاد سیال در نظر گرفته شد. جهت تحلیل بخشهای مختلف دیسک بین مهره‌ای از المانهای تقارن محوری ۸ گره‌ای مرتبه دو برای متغیرهای جابجایی و مرتبه اول برای متغیر فشار تخلخل (شکل ۳) استفاده شد.

¹¹Pore Fluid Pressure

¹²Galerkin Weighted Residual Method

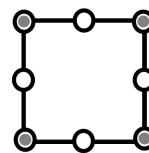
¹³ABAQUS

¹⁴Transversal Plane

جدول (۱) - مقادیر پارامترهای برگرفته از مراجع در سه مدل

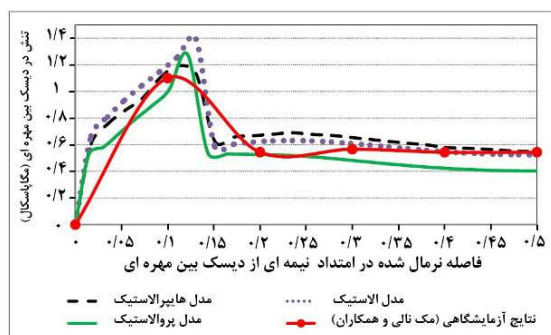
الاستیک، هایپرالاستیک و پروالاستیک [۳، ۷، ۱۲، ۱۴]

تئوری	مقادیر پارامترها	
		NP
Elastic	AF	$E=2.5 \text{ MPav}=0.1$
	EP	$E=20 \text{ MPav}=0.1$
Hyperelastic	NP	$C10: 0.12\text{MPa} \quad C01: 0.09\text{MPa}$
	AF	$C10: 0.56\text{MPa} \quad C01: 0.14\text{MPa}$
Poroelastic	NP	$E=1 \text{ MPav}=0.1 \quad \text{Porosity: } 0.78$ $\text{Permeability: } 3\text{E-}16 \text{ m}^4/\text{Ns}$
	AF	$E=2.5 \text{ MPav}=0.1 \quad \text{Porosity: } 0.71$ $\text{Permeability: } 3\text{E-}16 \text{ m}^4/\text{Ns}$
	EP	$E=20 \text{ MPav}=0.1 \quad \text{Porosity: } 0.80$ $\text{Permeability: } 7\text{E-}15 \text{ m}^4/\text{Ns}$



شکل (۳) - المان ۸ گره‌ای در نظر گرفته شده برای بخشهای مختلف دیسک بین مهره‌ای (مرتب‌دهنده دو برای متغیرهای جابجایی و مرتبه اول برای متغیر فشار تخریل)

لازم است ذکر شود که تحلیل حساسیت نیز بر تعداد و درجه المان یاد شده بر مبنای میزان تنش و جابجایی بیشینه انجام شد و در نهایت مدل با مجموع ۱۲۴۰۰ المان ۸ گره‌ای یاد شده مستقل از تعداد مش‌ها ارزیابی و برای انجام محاسبات بعدی استفاده شد [۱۵]. در گام نخست در مدلسازی تقارن محوری به بررسی رفتار بیومکانیکی دیسک بین مهره‌ای در قبال بارگذاری شبه استاتیکی فشاری پرداخته شد. در منابع تحقیق مقادیری متعدد و گاهی متفاوت از پارامترهای مدل الاستیک، هایپرالاستیک و پروالاستیک گزارش شده است. در جدول (۱) مقدار پارامترهای برگرفته از مراجع [۳، ۷، ۱۲، ۱۴] در سه مدل الاستیک، هایپرالاستیک و پروالاستیک - که پس از مطالعات پارامتری در این تحقیق، نتایج مناسبی را در پی داشت - آورده شده است. در این تحلیل شبه استاتیکی، مطابق با آزمایش گروه مک‌نالی و همکاران^{۱۵}، بار فشاری ۱۰۰۰ نیوتن به سطح فوقانی دیسک بین مهره‌ای اعمال شده؛ تنش ایجاد شده در طول دیسک محاسبه گردید. نمودار نشان داده شده در شکل (۴) مقایسه نتایج بدست آمده در بارگذاری استاتیکی را در سه مدل ساختاری یاد شده با نتایج آزمایشگاهی (مک‌نالی و همکاران [۱۶]) نشان می‌دهد.

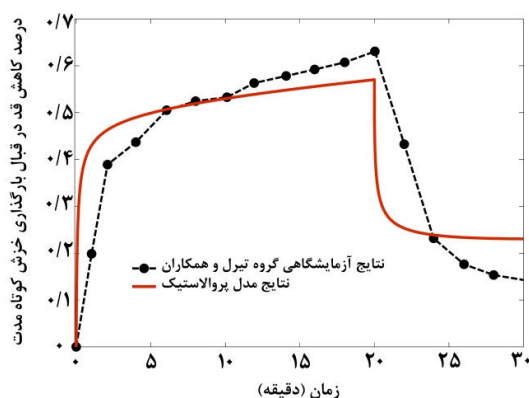


شکل (۴) - مقایسه نتایج بدست آمده در بارگذاری استاتیکی در سه مدل ساختاری یاد شده با نتایج آزمایشگاهی

اما نکته قابل توجه این است که رفتار وابسته به زمان دیسک بین مهره‌ای با مدل‌های الاستیک و هایپرالاستیک قابل توجیه نخواهد بود. لذا همانطور که اشاره شد؛ برای در نظر گرفتن شرایط واقعی دیسک بین مهره‌ای، ترکیبی از دو فاز سیال و جامد می‌تواند در مدلسازی مفید باشد و مدل پروالاستیک در بارگذاری‌های دینامیکی کارآمد خواهد بود.

¹⁵McNally et al.

همچنین در بازه باربرداری، طی ۱ ثانیه و به صورت یک شیب منفی، نیرو از ۸۰۰ نیوتن به ۴۴۰ نیوتن تقلیل یافت و برای ۶۰۰ ثانیه در مقدار ۴۴۰ نیوتن ثابت نگه داشته شد. مدل المان محدود مطابق با مش بندی یاد شده تحلیل شد و نتایج جابجایی محوری دیسک بین مهره‌های L4-L5 استخراج شدند. مطابق با اطلاعات موجود در منابع تحقیق [۱۲] یک سوم تغییرات ارتفاع ستون فقرات ناشی از تغییرات ناحیه کمربند برآورد می‌شود و لذا فرض می‌شود یک پانزدهم تغییرات قد در آزمایش یاد شده جابجایی محوری دیسک بین مهره‌های L4-L5 است. با تبدیل مقادیر یاد شده نمودار شکل (۶) مقایسه نتایج مدل المان محدود پروالاستیک و نتایج مطالعه تیرل و همکارانش [۱۷] را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که نتایج به صورت درصد کاهش قد نسبت به زمان رسم شده‌اند (میانگین قد اشخاص مورد آزمایش ۱۷۵۵ میلی‌متر بوده است).



شکل (۶) - مقایسه نتایج مدل المان محدود و آزمایش

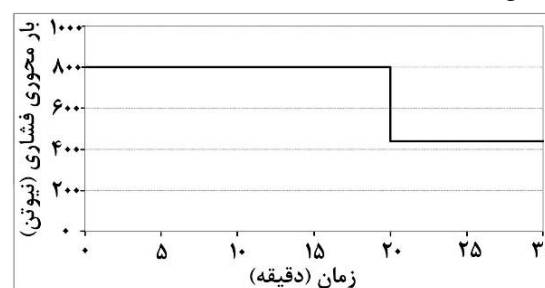
in vivo گروه تیرل در بارگذاری خزش کوتاه مدت

نتایج مبین آن بود که بعد از ۲۰ دقیقه بارگذاری ثابت، مدل پروالاستیک ۰/۵۷ درصد کاهش قد را پیش‌بینی می‌کند؛ حال آنکه این مقدار در آزمایش گروه تیرل حدود ۰/۶۳ درصد گزارش شده است. در بازه باربرداری نتایج مدل المان محدود حدود ۰/۰۹ درصد بیشتر از نتایج گزارش شده در آزمایش *in vivo* است. این در حالیست که این موضوع در برخی مدل‌های موجود در منابع تحقیق نیز مشاهده می‌شود [۱۲]. با افزایش فشار داخلی ناحیه هسته تا حدودی می‌توان در بازه باربرداری بازگشت بیشتری را مشاهده کرد؛

۲-۱- بارگذاری خزش کوتاه‌مدت^{۱۶}

مدل المان محدود تقارن محوری یاد شده برای بررسی صحت مدل در برابر بارگذاری خزشی کوتاه مدت، جهت شبیه‌سازی یکی از تنها مطالعات آزمایشگاهی *in vivo* موجود- که تیرل و همکارانش^{۱۷} [۲۰] انجام داده‌اند- استفاده شد. در این آزمایش که بر روی اشخاص سالم (مرد جوان با اندام متوسط) انجام شده است؛ اشخاص تحت بررسی در حالت ایستاده، دامبلی را به جرم ۴۰ کیلوگرم به مدت ۲۰ دقیقه نگه داشتند سپس به مدت ۱۰ دقیقه آن را بر روی زمین گذاشتند ولی همچنان به صورت ایستاده باقی ماندند. در حین آزمایش با اندازه‌گیری دقیق قد آنها میزان کاهش قد در اشخاص بررسی شد. برای شبیه‌سازی تست خزش کوتاه‌مدت یاد شده، نیروی فشاری برابر با ۸۰۰ نیوتن برای بازه بارگذاری و همچنین نیروی فشاری برابر با ۴۴۰ نیوتن برای بازه باربرداری در نظر گرفته شد.

این نیروها به صورت فشار یکنواخت بر روی سطح فوقانی مهره L4 اعمال شدند. با اعمال بارگذاری یاد شده (شکل ۵) و شرایط مرزی، مدل برای تحلیل آماده شد. شرایط مرزی مدل شامل عدم وجود جابجایی محوری و جریان سیال در خط تقارن محوری و همچنین وجود جریان آزاد سیال بین مرز ناحیه هسته، ناحیه فیبری و صفحه انتهایی، بود.

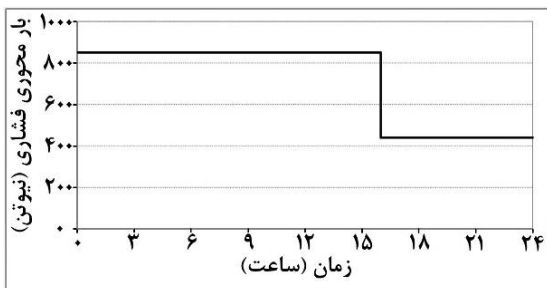


شکل (۵) - بارگذاری محوری اعمال شده به مدل در شبیه‌سازی خزش کوتاه مدت

جهت اعمال دامنه بارگذاری خزش، افزایش نیرو از صفر به ۸۰۰ نیوتن در بازه زمانی ۱ ثانیه و به صورت یک شیب اعمال شد. سپس نیروی ۸۰۰ نیوتن برای ۱۲۰۰ ثانیه ثابت نگه داشته شد.

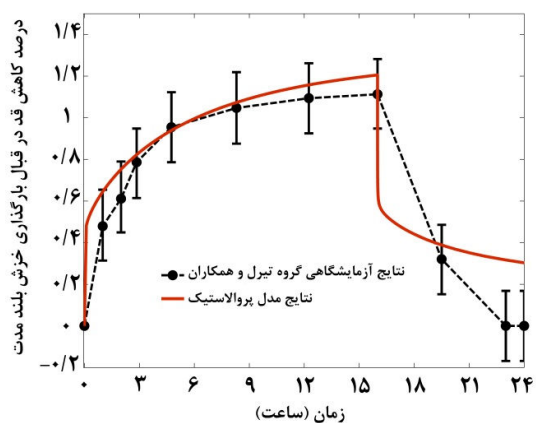
^{۱۶}Short-Term Creep

^{۱۷}Tyrrell et al.



شکل (۷) - بارگذاری محوری اعمال شده به مدل در شبیه‌سازی خزش بلند مدت

مدل المان محدود مطابق با مش‌بندی یاد شده تحلیل شد و نتایج جابجایی محوری دیسک بین مهره‌های L4-L5 استخراج شدند. مطابق آنچه اشاره شد یک پانزدهم تغییرات قد در این آزمایش جابجایی محوری دیسک بین مهره‌های L4-L5 است. با تبدیل مقادیر یاد شده در نمودار شکل (۸) نتایج مدل المان محدود پروالاستیک و مطالعه تیرل و همکارانش [۱۷] مقایسه شده است.



شکل (۸) - مقایسه نتایج مدل المان محدود و آزمایش *in vivo* گروه تیرل در بارگذاری خزش بلند مدت

مدل المان محدود جبران کامل جابجایی ایجاد شده را طی ۸ ساعت باربرداری نشان نمی‌دهد و در این موضوع عدم جبران کامل در برخی مطالعات *in vitro* [۱۸] نیز مشاهده شده است. نتایج مشابهی در عدم جبران جابجایی در بازه باربرداری در آخرین مدل‌های موجود در منابع تحقیق نیز مشاهده می‌شود [۱۲]. لذا می‌توان نتیجه گرفت که مدل پروالاستیک تقارن محوری یاد شده نیز می‌تواند نتایج قابل قبولی را در بررسی رفتار دیسک بین مهره‌ای در بارگذاری‌های بلند مدت نشان دهد.

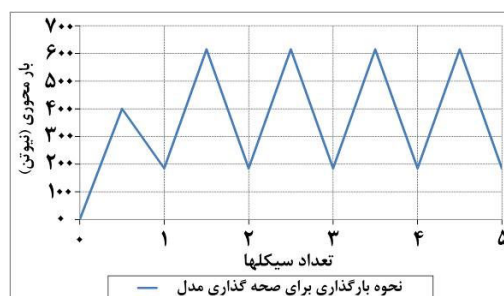
اما به دلیل اعمال شرایط یکسان در مدل و تعیین پارامترها از این امر خودداری کردیم. لازم است ذکر شود که اضافه کردن فشار تورمی (با اضافه نمودن فشار تخلخل در مرزها) تغییر چندانی محسوسی در نتایج ایجاد نکرد و تنها به افزایش زمان تحلیل منجر شد. در هر حال می‌توان نتیجه گرفت که مدل پروالاستیک تقارن محوری یاد شده می‌تواند رفتار کلی وابسته به زمان دیسک بین‌مهره‌ای در بارگذاری‌های خزش کوتاه مدت را پیش‌بینی کند.

۲-۲- بارگذاری خزش بلندمدت^{۱۸}

در تحلیل بعدی، مدل المان محدود تقارن محوری یاد شده برای بررسی صحت مدل در برابر بارگذاری خزشی بلند مدت، جهت شبیه‌سازی بخشی دیگر از مطالعات آزمایشگاهی *in vivo* موجود - که تیرل و همکارانش [۱۷] انجام داده‌اند - استفاده شد. این آزمایش به مدت یک شبانه روز بر روی اشخاصی سالم و تندرست (مرد جوان با اندام متوسط) انجام شده است، به نحوی که ۱۶ ساعت ایستاده‌اند و ۸ ساعت خوابیده‌اند و در طول این ۲۴ ساعت میزان قد این افراد ثبت شده است. برای شبیه‌سازی تست خزش بلندمدت یاد شده، نیروی فشاری برابر با ۸۵۰ نیوتن برای بازه بارگذاری و همچنین نیروی فشاری برابر با ۴۴۰ نیوتن برای بازه باربرداری در نظر گرفته شد. این نیروها به صورت فشار یکنواخت بر روی سطح بالایی مهره L4 اعمال شدند. با اعمال بارگذاری مدل (شکل ۷) و شرایط مرزی، مدل برای تحلیل آماده شد. جهت اعمال دامنه بارگذاری خزش، افزایش نیرو از صفر به ۸۵۰ نیوتن در بازه زمانی ۱ ثانیه و به صورت یک شیب اعمال شد. سپس نیروی ۸۵۰ نیوتن برای ۵۷۶۰۰ ثانیه باقی ماند. همچنین در بازه باربرداری، طی ۱ ثانیه و به صورت یک شیب منفی، نیرو از ۸۵۰ نیوتن به ۴۴۰ نیوتن تقلیل یافت و به مدت ۲۸۸۰۰ ثانیه در مقدار ۴۴۰ نیوتن ثابت نگه داشته شد.

۳-۲- بارگذاری چرخه‌ای^{۱۹}

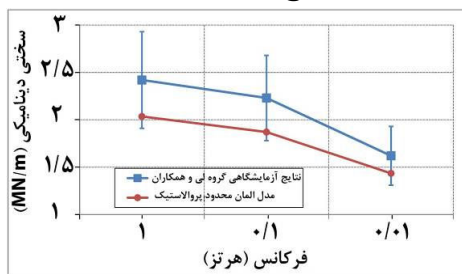
در تحلیل بعدی، مدل المان محدود تقارن محوری برای مطالعه رفتار دیسک بین مهره‌ای در قبال بارگذاری‌های چرخه‌ای استفاده شد. به طور کلی مطالعات همه‌گیرشناسی مبین آن است که بارگذاری‌های چرخه‌ای (ارتعاش با فرکانس پایین) و بلند مدت به عنوان دو عامل مهم در آسیب‌های دیسک بین مهره‌ای منتج به دردهای ناحیه کمر هستند. بارهای دینامیکی یاد شده علاوه بر ایجاد تنش‌های عمده در ناحیه فیبری و صفحات انتهایی، در نحوه تغذیه دیسک نیز نقش به سزایی دارند. لذا بررسی رفتار بیومکانیکی دیسک بین مهره‌ای برای شناسایی عوامل خطر در بارگذاری‌های چرخه‌ای از اهمیت بالایی برخوردار است. قبل از آنکه بتوان از مدل در بارگذاری‌های چرخه‌ای استفاده کرد باید صحت مدل در این نوع بارگذاری بررسی شود. به همین منظور، یکی از محدود اطلاعات آزمایشگاهی موجود در منابع تحقیق در بارگذاری‌های چرخه‌ای بر روی نمونه‌های دیسک بین مهره‌ای جسد انسان- که لی و همکارانش^{۲۰} [۱۹] انجام داده بودند- به کار برده شد. در این آزمایش رفتار دیسک بین مهره‌ای در بارگذاری فشاری تحت بار ارتعاشی با فرکانس پایین برابر با ۱ هرتز، ۰/۱ هرتز و ۰/۰۱ هرتز ارزیابی شد تا تأثیر بارهای دینامیکی بررسی شود. برای شبیه‌سازی بارگذاری چرخه‌ای و مقایسه نتایج با آزمایش انجام شده، پیش‌بار ۴۰۰ نیوتنی به مدل اعمال شد و در هر چرخه این میزان در بالاترین حد به ۶۱۵ نیوتن افزایش و در پایین‌ترین حد به ۱۸۵ نیوتن تقلیل داده شد (نیروی بین دو حد بالا و پایین برابر ۴۳۰ نیوتن در نظر گرفته شد). شکل (۹) رژیم بارگذاری یاد شده را نشان می‌دهد.



شکل (۹)- بارگذاری محوری اعمال شده به مدل در شبیه‌سازی بار چرخه‌ای

این آزمایش برای ۳۰ چرخه در سه فرکانس مختلف برابر با ۱ هرتز، ۰/۱ هرتز و ۰/۰۱ هرتز انجام شد. بارگذاری یاد شده به صورت فشار یکنواخت بر روی سطح بالایی مهره L4 اعمال شد. شرایط مرزی در این تحلیل‌ها به صورت عدم وجود جابجایی محوری و جریان سیال در خط تقارن محوری و همچنین وجود جریان آزاد سیال بین مرز ناحیه هسته، ناحیه فیبری و صفحه انتهایی در نظر گرفته شد. همچنین فشار تخلخل مرزی برابر با ۰/۳ مگا پاسکال در سطوح خارجی دیسک بین مهره‌ای اعمال شد تا این فشار بتواند شبیه‌ساز فشار تورمی^{۲۱} بافت باشد.

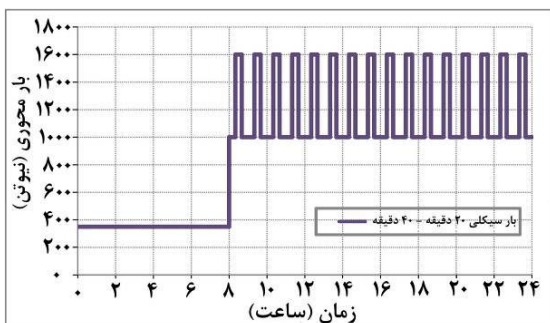
نتایج مدل مبین آن بود که بعد از ۳۰ چرخه بارگذاری، مقادیر جابجایی محوری با کاهش فرکانس افزایش می‌یابد که با نتایج بدست آمده در آزمایش‌های لی [۱۹] مطابقت دارد. برای مقایسه کمی مقادیر به دست آمده از مدل با نتایج آزمایش *in vitro*، کمیت سختی دینامیکی از حاصل تقسیم نیرو بر جابجایی نهایی بعد از ۳۰ چرخه استخراج شد. پیش‌بینی سختی دینامیکی با مدل المان محدود پرولاستیک برای فرکانس‌های ۱ هرتز، ۰/۱ هرتز و ۰/۰۱ هرتز به ترتیب برابر با ۲/۰۳۵ مگا نیوتن بر متر، ۱/۸۷۰ مگا نیوتن بر متر و ۱/۴۳۴ مگا نیوتن بر متر بوده است. این مقادیر در آزمایش‌های لی [۱۹] برای دیسک بین مهره‌ای ناحیه کمری به ترتیب برابر ۰/۵۱ ± ۲/۴۲ مگا نیوتن بر متر، ۰/۴۵ ± ۲/۲۳ مگا نیوتن بر متر و ۰/۳۱ ± ۱/۶۲ مگا نیوتن بر متر بوده است. نمودار شکل (۱۰) مقایسه نتایج مدل المان محدود پرولاستیک و نتایج مطالعه لی [۱۹] را نشان می‌دهد.



شکل (۱۰)- مقادیر سختی دینامیکی بدست آمده از مدل پرولاستیک و نتایج تست آزمایشگاهی لی [۲۲]

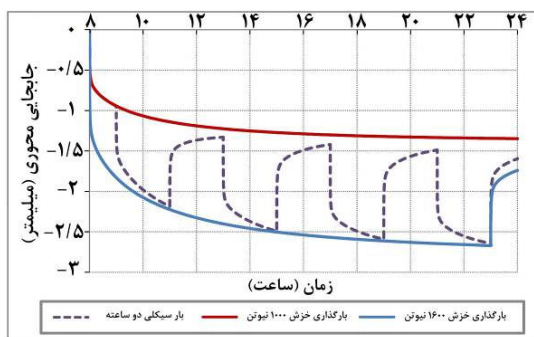
همانطور که در شکل (۱۰) مشاهده می‌شود، مدل پرولاستیک تقارن محوری توسعه داده شده با نتایج آزمایش یاد شده همخوانی مناسبی دارد و رفتار کلی مشابهی را پیش‌بینی

¹⁹Cyclic Loading²⁰Li et al.²¹Swelling Pressure



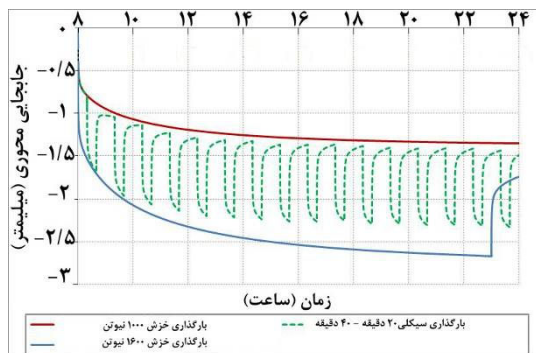
شکل (۱۳) - بارگذاری چرخه‌ای (۲۰ دقیقه فعالیت بالا و ۴۰ دقیقه فعالیت متوسط)

با اعمال شرایط مرزی - مطابق آنچه در قسمت قبل در صحنه‌گذاری مدل در برابر بارگذاری چرخه‌ای اشاره شد - مدل در برابر چهار رژیم بارگذاری اشاره شده تحلیل شد. نتایج مدل المان محدود پرولاستیک به صورت مقایسه‌ای در نمودار شکل‌های (۱۴) و (۱۵) نشان داده شده است.



شکل (۱۴) - مقایسه نتایج مدل المان محدود پرولاستیک با بارگذاری

چرخه‌ای دو ساعته با بارهای طولانی مدت

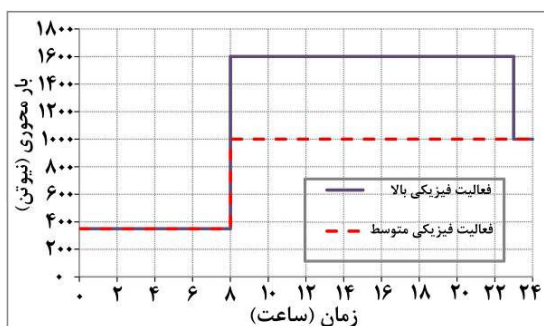


شکل (۱۵) - مقایسه نتایج مدل المان محدود پرولاستیک با بارگذاری

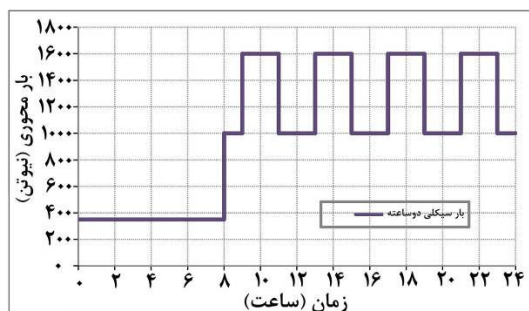
چرخه‌ای یک ساعته با بارهای طولانی مدت

همانطور که مشاهده می‌شود، جابجایی محوری نهایی محاسبه شده به ترتیب برابر با $1/348$ ، $1/1740$ ، $1/596$ و $1/489$ میلی‌متر است. نتایج آزمایش‌های گروه آدامز^[۲۱،۲۰] بیانگر آن بود که میزان کاهش ارتفاع دیسک بین‌مهره‌ای در بارگذاری طولانی

می‌کند؛ لذا می‌توان صحت مدل المان محدود پرولاستیک در بارگذاری‌های چرخه‌ای را نتیجه گرفت. پس از بررسی صحت مدل، در ادامه از مدل المان محدود پرولاستیک تقارن محوری برای بررسی رفتار بیومکانیکی دیسک بین‌مهره‌ای در طول بارگذاری و باربرداری در فعالیت روزانه استفاده شد. رژیم بارگذاری در طول ۲۴ ساعت، شامل بارگذاری در ۸ ساعت استراحت معادل با بار فشاری ۳۵۰ نیوتن و ۱۶ ساعت فعالیت شامل فعالیت فیزیکی متوسط معادل با بار فشاری ۱۰۰۰ نیوتن و فعالیت فیزیکی بالا معادل با بار فشاری ۱۶۰۰ نیوتن [۱۴] شبیه‌سازی شد. در این بخش از تحقیق، بازه فعالیت فیزیکی با چهار مدل مختلف بارگذاری مورد بررسی قرار گرفت تا نقش رژیم بارگذاری در نتایج به دست آمده، تبیین شود. در دو حالت اولیه بار ۱۰۰۰ نیوتن و ۱۶۰۰ نیوتن به صورت بار طولانی مدت و در دو حالت بعدی بارگذاری چرخه‌ای و با بازه‌های برابر ۲ ساعت و ۲۰ دقیقه فعالیت بالا و ۴۰ دقیقه فعالیت متوسط به مدل اعمال شد. در هر ۴ حالت جهت مقایسه نتایج، بارگذاری در ۱۰۰۰ نیوتن خاتمه می‌یابد. شکل‌های (۱۱) تا (۱۳) رژیم‌های بارگذاری یاد شده را نشان می‌دهند.



شکل (۱۱) - بارگذاری‌های طولانی مدت (فعالیت متوسط و بالا)



شکل (۱۲) - بارگذاری چرخه‌ای دو ساعته

مکانیوبیولوژی مشاهده شده در آزمایش‌ها را به خوبی شبیه‌سازی کند. لذا با توجه به خروجی‌های دیگر این مدل نظیر نحوه تغییر فشار تخریل‌ها و نحوه توزیع تنش، در پژوهش‌های آتی به مطالعه نقش بارگذاری‌های دینامیکی مختلف به عنوان عوامل خطر در شروع فرایند تخریب دیسک بین مهره‌ای پرداخته خواهد شد.

مراجع

- [1] Hart L.G., Deyo R.A., Cherkin D.C., Physician office visits for low back pain. Frequency, clinical evaluation, and treatment patterns from a U.S. national survey; Spine, 1995; 20: 11-19.
- [2] Belytschko T., Kulak R.F., Schultz A., Finite element stress analysis of an IVD; J. Biomech., 1972; 7: 277-285.
- [3] Wang J.L., Parnianpour M., Shirazi-Adl A., Engin A.E., Li S., Patwardhan A., Development and validation of a viscoelastic finite-element model of an L2-L3 motion segment; Theor. and Appl. Fracture Mech., 1997; 28: 81-93.
- [4] Wang J.L., Parnianpour M., Shirazi-Adl A., Engin A.E., Viscoelastic finite-element analysis of a lumbar motion segment in combined compression and sagittal flexion: Effect of loading rate; Spine, 2000; 25: 310-318.
- [5] Natarajan R.N., Williams J.R., Andersson G.B., Recent advances in analytical modeling of lumbar disc degeneration; Spine, 2004; 29: 2733-2741.
- [6] Simon R.B., Wu J.S., Carlton M.W., Kazarian L.E., France E.P., Evans J.H., Zienkiewicz O.C., Poroelastic dynamic structural models of rhesus spinal motion segments; Spine, 1985; 10: 494-507.
- [7] Argoubi M., Shirazi-Adl A., Poroelastic creep response analysis of a lumbar motion segment in compression; J. Biomech., 1996; 29: 1331-1339.
- [8] Wu J.S., Chen J.H., Clarification of the mechanical behavior of spinal motion segments through a three-dimensional poroelastic mixed finite element model; Med. Eng. and Physics, 1996; 18: 215-24.
- [9] Lee C.K., Kim Y.E., Lee C.S., Hong Y.M., Jung J.M., Goel V.K., Impact response of the IVD in a finite element model; Spine, 2000; 25: 2431-2439.
- [10] Laible J.P., Pflaster D.S., Krag M.H., Simon B.R., Haugh L.D., A poroelastic-swelling finite element model with application to the intervertebral disc; Spine, 1993; 18: 659-670.
- [11] Iatridis J.C., Laible J.P., Krag M.H., Influence of fixed charge density magnitude and distribution on the intervertebral disc; J. Biomech. Eng., 2003; 125: 12-24.
- [12] Williams J.R., Natarajan R.N., Andersson G.B.J., Inclusion of regional poroelastic material properties better predicts biomechanical behavior of lumbar discs subjected to dynamic loading; J. Biomechanics, 2007; 40: 1981-1987.

مدت ۱۰۰۰ نیوتن (فعالیت عادی فیزیکی) بعد از ۳ ساعت برابر $1/2 \pm 0/3$ میلی‌متر [۲۰] و بعد از ۶ ساعت برابر $1/53 \pm 0/34$ میلی‌متر [۲۱] بوده است. این مقادیر در زمانهای یاد شده در مدل المان محدود پروالاستیک به ترتیب برابر با $1/16$ و $1/26$ میلی‌متر بوده است که در محدوده مقادیر یاد شده است.

۳- نتیجه‌گیری

شناخت صحیح و دقیق ساختار و عملکرد مکانیکی یک بخش حرکتی ستون فقرات یکی از مسائل مهم در شناسایی روند آسیب‌های جزئی و یافتن عوامل اصلی این آسیب‌ها برای کاهش عوامل خطر است. مطالعه ضایعات دیسک بین مهره‌ای ناشی از تنشهای مکانیکی و بررسی نقش رژیمهای مختلف بارگذاری دینامیکی صرفاً با انجام آزمایش بر روی موجود زنده یا بر روی نمونه‌های جسد انسان بسیار مشکل است. به همین منظور مدل‌های المان محدود صحنه‌گذاری شده راه‌حل مناسبی در مطالعات یاد شده محسوب می‌شوند. برای مدل کردن شرایط واقعی دیسک بین مهره‌ای، در نظر گرفتن ترکیبی از دو فاز سیال و جامد (استفاده از تئوری محیط‌های متخلخل) برای پیش‌بینی رفتار وابسته به زمان آن، بسیار کارآمدتر از سایر مدل‌های رفتاری است. به همین منظور در این مقاله ابتدا به توسعه یک مدل پروالاستیک غیرخطی از یک جزء حرکتی پرداخته شد تا بر پایه آن بتوان رفتار وابسته به زمان ستون فقرات را مطالعه کرد. سپس این مدل در قبال بارگذاری‌های مختلف شبه‌استاتیکی، خزش کوتاه مدت، خزش بلند مدت و بارگذاری چرخه‌ای در مقایسه با آزمایش‌های *in vivo* و *in vitro* صحنه‌گذاری شد. نتایج شبیه‌سازی آزمایش‌های یاد شده مبین آن بود که این مدل پروالاستیک تقارن محوری می‌تواند نتایج قابل قبولی را در بررسی رفتار وابسته به زمان دیسک بین مهره‌ای در بارگذاری‌های دینامیکی نشان می‌دهد. در ادامه بر پایه این مدل رفتار وابسته به زمان ستون فقرات در بارگذاری‌های چرخه‌ای روزانه مطالعه شد. با مقایسه رفتار ماکروسکوپی دیسک در بارگذاری‌های مختلف می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش بازه چرخه میزان جابجایی ایجاد شده در دیسک کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر سختی دینامیکی دیسک بین مهره‌ای تابعی از رژیم بارگذاری چرخه‌ای است. هدف اصلی این تحقیق، توسعه یک مدل صحنه‌گذاری شده از یک جزء حرکتی بوده است که رفتار

که در آنها σ مبین تنش کل و ρ چگالی ترکیبی است که به ترتیب با روابط (۶) و (۷) تعریف می‌شوند. بردار ثابت \mathbf{m} نیز طبق رابطه (۸)، بیان می‌کند فشار تنها به صورت تنشهای اصلی در مدل پیوسته مذکور نقش دارد.

$$\sigma = (1-n)\sigma_s - n\mathbf{m}p \quad (۶)$$

$$\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_f \quad (۷)$$

$$\mathbf{m} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (۸)$$

رابطه پیوستگی سیال را بر اساس رابطه لویس و شرفلر می‌توان به صورت رابطه (۹) نوشت [۲۲]:

$$Q_v + Q_p + Q_\rho + Q_s + \nabla^T(\rho_f \mathbf{q}) = 0 \quad (۹)$$

که در آن Q_v, Q_p, Q_ρ, Q_s به ترتیب مبین نرخ کرنش حجمی، تراکم پذیری جامد متخلخل، تراکم پذیری سیال و تراکم پذیری جامد متخلخل تحت اثر تنش مؤثر هستند و با روابط (۱۰) تا (۱۳) تعریف می‌شوند:

$$Q_v = \rho_f \frac{\partial e_v}{\partial t} = \rho_f \mathbf{m}^T \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \quad (۱۰)$$

$$Q_p = \rho_f \frac{1-n}{K_s} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (۱۱)$$

$$Q_\rho = \frac{n\rho_f}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (۱۲)$$

$$Q_s = -\frac{\rho_f}{3K_s} \mathbf{m}^T \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (۱۳)$$

رابطه ساختاری برای فاز جامد مطابق با رابطه (۱۴) است که در آن σ' تنش مؤثر نامیده می‌شود و با رابطه (۱۵) تعریف می‌شود. همچنین ماتریس ساختاری الاستیک جامد متخلخل، \mathbf{e} کرنش کلی و \mathbf{e}^p کرنش ایجاد شده در جامد متخلخل به واسطه فشار سیال است که با رابطه (۱۶) تعریف می‌شود:

$$\sigma' = \mathbf{C}^E (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) \quad (۱۴)$$

$$\sigma' = \sigma + \mathbf{m}p \quad (۱۵)$$

$$\mathbf{e}^p = -\frac{\mathbf{m}}{3K_s} p \quad (۱۶)$$

از ترکیب روابط ۹ تا ۱۴، ۱۶ و ۱۷ می‌توان رابطه پیوستگی سیال را چنین نوشت:

- [13] Ehlers W., Challenges of porous media models in geo and biomechanical engineering including electro chemically active polymers and gels; Eng. Sci. Appl. Math., 2009; 1: 1-24.
- [14] Schmidt H., Shirazi-Adl A, Galbusera F., Wilke H.J., Response analysis of the lumbar spine during regular daily activity-A finite element analysis, J. Biomechanics, 2010.
- [15] Nikkhoo M., Haghpanahi M., Parnianpour M., Wang J.L, An Axisymmetric Poroelastic Model for Description of the Short-Term and Long-Term Creep Behavior of L4-L5 Intervertebral Disc, Proc. of the 1st Middle East Conference on Biomedical Engineering (MECBME'11), 2011; pp. 308-311, UAE.
- [16] McNally D.S., Adams M.A., Goodship A.E., Can intervertebral disc prolapse be predicted by disc mechanics?, Spine, 1993; 18: 1525-1530.
- [17] Tyrrell A.R., Reilly T. et al., Circadian variation in stature and the effects of spinal loading, Spine, 1985; 10: 161-164.
- [18] Busscher I., Van Dieen J.H., Van der Veen A.J., Kingma I., Meijer G.J., Verkerke G.J., Veldhuizen A.G., The effect of creep and recovery on the in vitro biomechanical characteristics of human multi-level thoracolumbar spinal segments, Clinical Biomechanics, 2011; 26(5): 438-44.
- [19] Li S., Response of human intervertebral discs to prolonged axial loading and low-frequency vibration, PhD thesis, University of Illinois at Chicago, 1994.
- [20] Adams M.A., McMillan D.W., Green T.P., Dolan P., Sustained loading generates stress concentration in lumbar intervertebral discs, Spine, 1996; 21: 434-438.
- [21] Adams M.A., Dolan P., Hutton W.C., Diurnal variations in the stresses on the lumbar spine, Spine, 1987; 12: 130-137.
- [22] Kojic M., Filipovic N., Stojanovic B., Kojic N., Computer Modeling in Bioengineering, John Wiley & Son, 2008.

ضمیمه

همانطور که در متن مقاله اشاره شد، سه رابطه اصلی مورد استفاده در این تئوری عبارت از روابط بقای اندازه حرکت برای فاز جامد (رابطه ۱) و فاز سیال (رابطه ۲) و همچنین رابطه داری (رابطه ۳) است.

چنانچه رابطه (۲) را بر اساس رابطه (۳) بنویسیم، رابطه (۴) حاصل می‌شود و اگر رابطه (۴) را در ضرب متخلخل (n) ضرب کرده؛ سپس با رابطه (۱) جمع کنیم رابطه (۵) بدست می‌آید:

$$-\nabla p + \rho_f \mathbf{b} - \mathbf{k}^{-1} \mathbf{q} - \rho_f \ddot{\mathbf{u}} - \frac{\rho_f}{n} \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (۴)$$

$$\nabla^T \sigma + \rho \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho_f \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (۵)$$

$$\nabla^T \mathbf{q} + \left(\mathbf{m}^T - \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{C}^E}{3K_s} \right) \dot{\mathbf{e}} + \left(\frac{1-n}{K_s} + \frac{n}{K_f} - \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{C}^E \mathbf{m}}{9K_s^2} \right) \dot{p} = 0 \quad (17)$$

با استفاده از روش باقی مانده وزنی گلرکین و در نظر گرفتن چهار متغیر گروه‌ای (سه درجه آزادی جابجایی و فشار تخریل) از معادلات، ماتریسهای سختی استخراج می‌شوند و رابطه حاکم بر مدل المان محدود پروالاستیک به صورت ماتریسی به شکل رابطه (۱۸) در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{PU} & \mathbf{C}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU} & \mathbf{K}_{UP} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_U \\ \mathbf{F}_P \end{bmatrix} \quad (18)$$

مقادیر ماتریسی و برداری رابطه (۱۸) به شرح روابط (۱۹) تا

(۲۶) هستند:

$$\mathbf{M} = \int_V \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u dV \quad (19)$$

$$\mathbf{C}_{PU} = - \int_V \mathbf{N}_p^T \left(\mathbf{m}^T - \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{C}^E}{3K_s} \right) \mathbf{B} dV \quad (20)$$

$$\mathbf{C}_{PP} = \int_V \mathbf{N}_p^T \left(\frac{1-n}{K_s} + \frac{n}{K_f} - \frac{\mathbf{m}^T \mathbf{C}^E \mathbf{m}}{9K_s^2} \right) \mathbf{N}_p dV \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_{UU} = - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C}^E \mathbf{B} dV \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_{UP} = \int_V \mathbf{B}^T \left(\frac{\mathbf{C}^E \mathbf{m}}{3K_s} + \mathbf{m} \right) \mathbf{N}_p dV \quad (23)$$

$$\mathbf{K}_{PP} = \int_V \mathbf{N}_p^T k^{-1} \mathbf{N}_p dV \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_u = \int_V \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{b} dV + \int_V \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{t} dV - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{K}_{up} \mathbf{P} \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_p = \int_V \mathbf{N}_p^T \mathbf{n}^T \mathbf{q} dV \quad (26)$$

که در آن \mathbf{B} ماتریس تبدیل کرنش جابجایی، \mathbf{b} نیروی بدنی و \mathbf{t} نیروی سطحی است. برای حل معادلات فوق- که در دو رابطه (۲۷) و (۲۸) آورده شده است- باید از روش‌های انتگرال‌گیری عددی استفاده شود. در این میان استفاده از روش نیومارک استاندارد بسیار متداول است.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{UU}\mathbf{U} + \mathbf{K}_{UP}\mathbf{P} = \mathbf{F}_U \quad (27)$$

$$\mathbf{C}_{PU}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{PP}\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{K}_{PP}\mathbf{P} = \mathbf{F}_P \quad (28)$$

بنابراین در دو رابطه (۲۷) و (۲۸)، مقادیر جابجایی (\mathbf{U}) و فشار تخریل (\mathbf{P}) باید در قبال بارگذاری و شرایط مرزی اعمال شده در گامهای زمانی مختلف محاسبه شوند؛ به گونه‌ای که در هر گام نتایج همگرا باشند.