

Image reconstruction in Diffuse Optical Tomography by a High-Order Finite Element Method

M. Hadinia^{1*}, R. Jafari²

¹Ph.D Student, Biomedical Engineering Group, Electrical Engineering Department, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

²Assistant Professor, Biomedical Engineering Group, Electrical Engineering Department, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran, jafari@eetd.kntu.ac.ir

Abstract

This paper presents image reconstruction in Diffuse Optical Tomography (DOT) using a high-order finite element method. DOT is a non-invasive imaging modality for visualizing and continuously monitoring tissue and blood oxygenation levels in brain and breast. Image reconstruction in DOT leads to an inverse problem consisting of a forward problem and an iterative algorithm. The inverse problem in DOT systems is ill posed and depends on the accuracy of the forward problem. An accurate model, that describes the light transmission in tissue is required and can increase the spatial resolution. Using first order finite elements in the forward problem, numerical results are converged to the exact solution with increasing the number of elements. However, increasing the number of elements may cause a critical issue in the ill-posed inverse problem. This paper focuses on applying the high-order finite element method without increasing the number of elements, and image reconstruction is accomplished. The forward problem results are compared with analytical solutions. Images of absorbers reconstructed using this method are presented.

Key words: Diffuse optical tomography, forward problem, high-order finite element, image reconstruction.

*Corresponding author

Address: Maedeh Hadinia, Biomedical Engineering Group, Electrical Engineering Department, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran
Tel: +982184062227
Fax: +982188462066
E-mail: M_hadinia@ee.kntu.ac.ir

بازسازی تصویر در مقطع‌نگاری نوری پخشی با استفاده از روش المان محدود مرتبه بالا

مائده هادی‌نیا^{۱*}، رضا جعفری^۲

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی پزشکی، گروه مهندسی پزشکی، دانشکده برق، دانشگاه خواجه نصیر طوسی، تهران

^۲ استادیار گروه مهندسی پزشکی، دانشکده برق، دانشگاه خواجه نصیر طوسی، تهران jafari@eetd.kntu.ac.ir

چکیده

در این مقاله از روش المان محدود مرتبه بالا برای بازسازی تصویر در مقطع‌نگاری نوری پخشی (DOT) استفاده شده است. مقطع‌نگاری نوری پخشی یک روش تصویربرداری غیرتهاجمی برای تجسم و نمایش پیوسته بافت و میزان اکسیژن خون در مغز و سینه است. بازسازی تصویر در این روش به یک مسأله معکوس منجر می‌شود که شامل یک مسأله پیشرو و یک الگوریتم تکراری است. مسأله معکوس در سیستم‌های DOT، بدحالت است و دقت حل مسأله معکوس به دقت مسأله پیشرو وابسته است. ارائه مدلی دقیق برای مسأله پیشرو که انتقال نور درون یک بافت با هندسه مشخص را مدل‌سازی کند و بتواند دقت تفکیک‌پذیری مکانی را نیز افزایش دهد؛ امری ضروری است. در صورت استفاده از روش المان محدود مرتبه بالا در مدل‌سازی مسأله پیشرو، دقت مسأله پیشرو با افزایش تعداد المان‌ها افزایش می‌یابد؛ اما بدلیل بدحالتی مسأله معکوس، در افزایش تعداد المان‌ها محدودیت وجود دارد. در این مقاله با استفاده از روش المان محدود مرتبه بالا و بدون افزایش تعداد المان‌ها دقت مسأله پیشرو افزایش یافته است و تصویر در DOT بازسازی شده است. نتایج مسأله پیشرو با جواب تحلیلی مقایسه شده و بازسازی تصویر برای دو نمونه جذب‌کننده ارائه شده است.

کلیدواژگان: مقطع‌نگاری نوری پخشی، مسأله پیشرو، روش المان محدود مرتبه بالا، بازسازی تصویر

*عهده‌دار مکاتبات

نشانی: تهران، خیابان شریعتی، پل سیدخندان، دانشکده برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، گروه مهندسی پزشکی، کدپستی: ۱۳۵۵-۱۶۳۱۵

تلفن: ۰۲۱۸۴۰۶۲۲۲۷، دورنگار: ۰۲۱۸۸۴۶۲۰۶۶، پیام‌نگار: m_hadinia@ee.kntu.ac.ir

۱- مقدمه

پیشرو برای محاسبه میدان نوری استفاده می‌شود و مقادیر اندازه‌گیری با مقادیر محاسباتی متناظر، مقایسه و خطاها محاسبه می‌شوند. با اجرای یک الگوریتم تکراری، خطای کل کمینه شده؛ در نتیجه ضرایب جذب و پراکندگی تقریبی استفاده شده در الگوریتم به مقدار واقعی خود نزدیک می‌شوند. با مشخص شدن ضرایب جذب و پراکندگی، تصویر داخل بافت نیز مشخص می‌شود. به دلیل محیط پراکننده انتشار نور و محدودیت‌های اعمال منابع و تعداد آشکارسازهای نوری مسأله معکوس در DOT، بدحالت است و اندازه‌گیری‌ها در DOT دارای نویز زیادی هستند؛ بنابراین یک خطای کوچک در خروجی مسأله پیشرو می‌تواند منجر به نوسانات نامحدود خروجی مسأله معکوس شود. در واقع دقت مسأله معکوس در به دست آوردن نتایج صحیح، به دقت مسأله پیشرو بستگی دارد. بنابراین ارائه یک مدل دقیق و سریع که انتقال نور درون بافتی با هندسه مشخص را توصیف کند؛ ضروری است. تقریب دیفیوژن معادله انتقالی تابشی از معادله ماکسول را می‌توان یک مدل پیشرو دانست و از آن استفاده کرد [۴]. برای حل معادله دیفیوژن، روش‌های عددی مختلفی را می‌توان به کار برد. این روش‌ها شامل روش المان محدود (FE) [۵، ۶]، روش المان مرزی [۷، ۶]، روش تفاضل محدود [۸، ۹]، و ترکیب روش‌های المان مرزی و المان محدود [۱۰] هستند. در این میان از روش المان محدود بطور گسترده‌ای در مسائل الکترومغناطیس و اپتیک پزشکی استفاده می‌شود [۱۱-۱۴]. برای حل معادله دیفیوژن در مدل‌سازی مسأله پیشرو DOT، روش المان محدود مرتبه اول نیز یکی از روش‌های عددی رایجی است که استفاده می‌شود [۵، ۴].

در تحلیل المان محدود، گسسته‌سازی ناحیه اولین و مهمترین مرحله است؛ زیرا تعداد المان‌ها و نحوه گسسته‌سازی ناحیه بر نیازمندی‌های حافظه کامپیوتر، زمان محاسبات و دقت نتایج عددی تأثیر می‌گذارد [۱۵]. در روش المان محدود مرتبه اول با افزایش تعداد المان‌ها، دقت مسأله پیشرو افزایش می‌یابد. در مرجع [۱۶] از این روش برای افزایش دقت مسأله پیشرو استفاده شده است. اما هنگام حل مسأله معکوس برای کاهش تعداد متغیرهای مجهول و افزایش سرعت محاسبات باید تعداد المان‌ها کاهش یابد. کاهش تعداد المان‌ها باعث کاهش دقت و

مقطع‌نگاری نوری پخشی^۱ یک روش غیرتهاجمی تصویربرداری با استفاده از ویژگی‌های نوری بافت است. این روش در مقایسه با تصویربرداری X-ray بسیار کم‌خطرتر و از نظر قیمت نیز از MRI، X-ray، CT، یا MRI ارزانتر است. از سوی دیگر CT و MRI اطلاعات آناتومیک اولیه‌ای را از ساختار بافت تهیه می‌کنند، حال آنکه تصاویر عملکردی^۲ که اطلاعاتی درباره پارامترهای مرتبط فیزیولوژیک و تغییرات آنها ارائه می‌کنند- بیشتر مورد نیاز هستند. البته مقطع‌نگاری نوری پخشی هرگز نمی‌تواند از حیث دقت تفکیک‌پذیری مکانی با روش‌های آناتومیک نظیر MRI و CT رقابت کند؛ اما دارای مزایایی مانند حساسیت نسبت به تغییرات آناتومیک، ارزانی، کارایی، قابلیت درمانی و قابل حمل بودن است. همچنین DOT هنگام اتصال به بیمار برای استفاده در پایش‌های^۳ طولانی مدت، به اندازه کافی ایمن است و هیچ خطری را برای بیمار ایجاد نمی‌کند. بنابراین تصویربرداری نوری پخشی پتانسیل بسیار بالایی در کاربردهای زیست پزشکی دارد. مهمترین کاربردهای روش مقطع‌نگاری نوری پخشی شامل تصویربرداری از مغز نوزادان و افراد بزرگسال، تجسم بخشیدن و نمایش پیوسته بافت و سطوح اکسیژن خون، آشکار سازی تومورها و ماموگرافی هستند [۱-۳].

در این روش آرایه‌ای از منابع نوری، نور مادون قرمز نزدیک^۴ را به بافت اعمال می‌کند. این نور در بافت پراکنده می‌شود و سپس آرایه‌ای از آشکارسازهای نوری، نور خارج شده از بافت را ثبت می‌کند و شار تغییر پذیر با زمان خروجی اندازه‌گیری می‌شود. از آنجایی که بافت بیولوژیک در نور NIR، یک محیط با پراکندگی نوری زیادی محسوب می‌شود و نور منتشر شده در بافت تنها در جهت مستقیم حرکت نمی‌کند، آشکارسازهای نوری بکار رفته در DOT علاوه بر نور پراکنده شده، نور انتقال یا انعکاس یافته را نیز می‌توانند آشکار کنند [۱-۳].

بازسازی تصویر در مقطع‌نگاری نوری پخشی با حل یک مسأله معکوس انجام می‌شود. در مسأله معکوس، با فرض مقادیر تقریبی معلوم برای ضرایب جذب و پراکندگی، از یک مسأله

¹ Diffuse Optical Tomography (DOT)

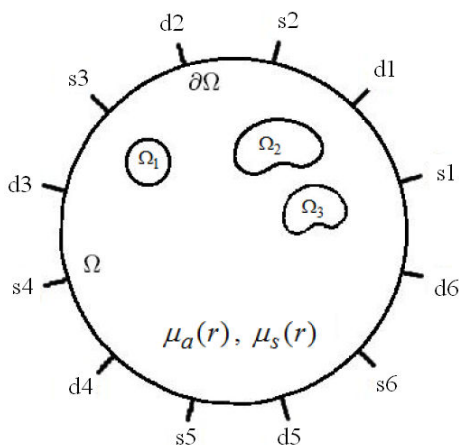
² Functional

³ Monitoring

⁴ Near Infrared (NIR)

محل‌های اندازه‌گیری روی سطح $\partial\Omega$ هستند.

برای استخراج مسأله پیشرو به مدلی برای انتقال فوتون در بافت نیاز داریم. در حالتی که در آن پراکندگی نور بر جذب غالب باشد، انتشار فوتون در بافت بیولوژیک می‌تواند با معادله دیفیوژن توصیف شود. این شرایط در بافت نرم در محدوده طول موج ۶۵۰-۱۳۰۰ نانومتر برقرار است [۲۰].



شکل (۱) - نمایش ساده سیستم مورد استفاده برای مقطع‌نگاری نوری پخش‌ی در حوزه زمان. شش منبع در مکان‌های منبع s و شش آشکارساز در مکان‌های d با فیبرهای نوری به مرز $\partial\Omega$ وصل شده‌اند.

ورود نور به بافت یک چگالی فوتون تغییرپذیر با زمان را در داخل بافت بوجود می‌آورد. $\Phi(r,t)$ چگالی فوتون (با ابعاد انرژی بر واحد حجم) در موقعیت مکانی $r \in \Omega$ ناشی از یک منبع نور نقطه‌ای در موقعیت مکانی s_1 است.

تحت شرط $\mu_a \ll \mu'_s$ - که در مورد انتقال نور در بافت بیولوژیک برقرار است - چگالی فوتون در بافت در معادله دیفیوژن حوزه زمان زیر صدق می‌کند [۱۶،۵]:

$$-\nabla \cdot D(r)\nabla\Phi + \mu_a\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = q(r,t) \quad (1)$$

که در آن c سرعت نور، $q(r,t)$ چگالی منبع فوتون همه‌سو یکسان متغیر با زمان و $D(r)$ ضریب دیفیوژن است که از رابطه $D(r) = 1/3(\mu_a(r) + \mu'_s(r))$ بدست می‌آید. همچنین $\mu_a(r)$ ضریب جذب، $\mu'_s(r) = (1-g)\mu_s$ ضریب پراکندگی کاهش یافته، $\mu_s(r)$ ضریب پراکندگی در موقعیت مکانی r و g ضریب ناهسانگردی است که بصورت کسینوس

حتی در مواردی پاسخ غلط مسأله پیشرو می‌شود و سبب می‌شود مسأله معکوس قادر به بازسازی تصویر نباشد. در مقاله حاضر استفاده از توابع پایه مرتبه بالا^۵ برای افزایش دقت روش المان محدود در حل مسأله پیشرو، پیشنهاد شده است. با استفاده از این روش بدون افزایش تعداد المان‌ها و گره‌ها می‌توان دقت روش المان محدود را افزایش داد. در روش اجزای محدود مرتبه بالا تعداد المان‌ها و گره‌ها تغییر نمی‌کند، بنابراین تعداد مجهولات ثابت می‌ماند و تنها گره‌هایی درون المان در نظر گرفته می‌شوند که مرتبه آن المان را افزایش می‌دهد [۱۵]. با استفاده از این روش می‌توان با تعداد مش کمتر یا عبارت دیگر با تعداد مجهولات کمتر در مسأله معکوس، دقت مسأله پیشرو را افزایش داد. با توجه به مطالب گفته شده، حل معادله دیفیوژن با استفاده از روش المان محدود مرتبه بالا، می‌تواند در جایگاه یک مدل پیشرو استفاده شود. در مرجع [۱۷] از این روش بعنوان مدل پیشرو استفاده شده است. در این مقاله از روش المان محدود مرتبه ۳ بعنوان مدل پیشرو برای بازسازی تصویر در DOT استفاده می‌شود. با افزایش مرتبه المان به بالاتر از سه، فرمولها و محاسبات پیچیده‌تر می‌شود و زمان اجرا و دقت نتایج نیز افزایش می‌یابد؛ ولی هنگامی که خطا در اجزای دیگر سیستم، بطور مثال در محاسبه مختصات نقاط، وجود دارد دقت بسیار زیاد مورد نیاز نیست. همچنین استفاده از المان‌های مرتبه بالاتر در مسائل پزشکی به علت طولانی شدن زمان اجرا، مناسب نیست.

روش المان محدود مرتبه بالا در سایر روش‌های مقطع‌نگاری مانند مقطع‌نگاری امپدانس الکتریکی نیز مورد استفاده قرار گرفته است [۱۸].

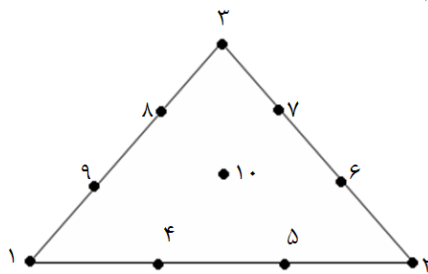
۲- مسأله پیشرو در DOT

یک سیستم تصویربرداری مادون قرمز نزدیک، در شکل (۱) نشان داده شده است. یک سیستم DOT شامل مدارهای الکترونیکی در مرجع [۱۹] به طور کامل نمایش داده شده است. در این شکل Ω حجم نمونه بافت تحت آزمایش، Ω_1 ، Ω_2 و Ω_3 زیرنواحی با ضرایب جذب و یا پراکندگی متفاوت، (s_1, \dots, s_N) مجموعه محل اعمال نور و (d_1, \dots, d_M) مجموعه

⁵ High Order Finite Element

۳-۲- المان‌های مرتبه سه

برای بالا بردن دقت روش المان محدود بدون افزایش تعداد المان‌ها و گره‌ها می‌توان مرتبه توابع پایه را افزایش داد. در این روش، گره‌های بیشتری برای کنترل درجه‌های آزادی اضافی مورد نیاز هستند و اندازه ماتریس‌ها نیز افزایش می‌یابد [۱۴]. اگرچه چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا بسیار دقیق هستند؛ از حیث فرمول‌بندی ریاضی از چندجمله‌ای‌های مرتبه پایین‌تر پیچیده‌ترند [۱۴]. در این بخش برای نمایش کاربرد توابع پایه مرتبه بالا، به معرفی توابع پایه برای المان‌های مرتبه سه می‌پردازیم.



شکل (۲) - یک المان مثلثی مرتبه ۳ [۹]

این روش می‌تواند به سایر المان‌های مرتبه بالا نیز تعمیم داده شود. شکل ۲ یک المان مثلثی مرتبه سوم را - که دارای ۱۰ گره است - نشان می‌دهد. برای داشتن المان مرتبه سوم هر ضلع مثلث را به سه قسمت تقسیم کرده و گره‌ای نیز درون المان در نظر می‌گیریم. با تعریف توابع پایه برای این گره‌ها مرتبه المان افزایش می‌یابد، بدون آنکه تعداد المان‌ها تغییری کند. پتانسیل هر نقطه درون المان با استفاده از رابطه (۲) با قرار دادن N_n برابر ۱۰ به دست می‌آید. توابع پایه برای المان‌های مرتبه ۳ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۴]:

متوسط توزیع زاویه پراکندگی تعریف می‌شود [۲۱، ۵].

برای حل معادله (۱) لازم است شرایط مرزی مناسبی را در نظر بگیریم. رایج‌ترین شرط مرزی به کار برده شده، شرط «دیریشله» ($\Phi(d) = 0 \quad \forall d \in \partial\Omega$) است که از لحاظ فیزیکی معادل با جذب کامل فوتون‌ها در محیط احاطه‌کننده $\partial\Omega$ است [۲۲]. شار خروجی از مرز یا برون رفت با قانون «فیک» - که به صورت $\Gamma(d, t) = -k\hat{n} \cdot \nabla\Phi(r, t)|_{\partial\Omega}$ است - به چگالی فوتون مربوط می‌شود که در آن \hat{n} بردار نرمال واحد به سمت خارج در نقطه d بر سطح $\partial\Omega$ است.

۳-۳- روش المان محدود

برای حل معادله دیفیوژن به روش المان محدود یک تقریب خطی قطعه‌ای پیوسته Φ^e برای Φ در نظر می‌گیریم. ناحیه Ω به L المان بدون همپوشانی $\tau_i, i=1, \dots, L$ تقسیم می‌شود و شامل D گره $N_i, i=1, \dots, D$ است. جواب Φ^e برای معادله دیفیوژن رابطه (۱) در هر نقطه داخل المان τ_i با یک تخمین خطی از مقادیر گره $\Phi_j^e(t)$ بدست می‌آید:

$$\Phi^e(r, t) = \sum_{j=1}^{N_n} \Phi_j^e(t) \psi_j^e(r). \quad (2)$$

که در آن $\Phi^e(r, t)$ پاسخ برای المان e - ام، $\Phi_j^e(t)$ مقدار تابع $\Phi^e(r, t)$ در گره j - ام المان e و $\psi_j^e(r)$ تابع پایه مربوط به گره j - ام المان e است. N_n نیز برابر تعداد گره‌های المان است. یکی از مراحل مهم در تحلیل المان محدود انتخاب تابع درون‌یاب یا تابع پایه است که تقریبی از راه حل مجهول درون یک المان ارائه می‌کند. تابع درون‌یاب می‌تواند یک چندجمله‌ای خطی یا چندجمله‌ای مرتبه بالاتر باشد.

۳-۱- المان‌های مرتبه یک

با استفاده از المان‌های مثلثی مرتبه یک (خطی) در معادله (۲) تعداد گره‌های هر المان برابر ۳ ($N_n = 3$) است. در المان‌های مرتبه اول تابع پایه برای گره j - ام المان e از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۴]:

$$\psi_j^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y) \quad j=1, 2, 3 \quad (3)$$

در رابطه فوق Δ^e مساحت هر المان است و a_j^e, b_j^e, c_j^e نیز در [۱۴] تعریف شده‌اند.

۴- مسأله معکوس در DOT

بازسازی تصویر در مقطع‌نگاری نوری پخشی به روش معکوس انجام می‌شود. مسأله معکوس در DOT عبارت است از یافتن تخمین‌هایی برای ضرایب جذب و پراکندگی مجهول وقتی که توزیع منابع نور و داده‌های اندازه‌گیری روی $\partial\Omega$ معلوم باشند. در این مقاله ما همان روند ارائه شده در مرجع [۵] را در نظر می‌گیریم، یعنی بازسازی تصویر را تنها برای ضریب جذب (μ_a) انجام می‌دهیم. داده اندازه‌گیری مورد استفاده برای بازسازی تصویر، لگاریتم دامنه

$(\ln[E[\Gamma(\xi_j, t)]] = \ln[\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^{(j)}(\xi_j, t) dt])$ است. برای نمایش

عملکرد و قابلیت روش المان محدود مرتبه بالا در فرایند بازسازی تصویر از داده‌های حاصل از مدل پیشرو روش المان محدود مرتبه بالا با اضافه کردن نویز تصادفی با توزیع گوسی استفاده شده است. ماتریس ژاکوبین استفاده شده در این مقاله مشابه روش مرجع [۲۳] است.

در این مقاله از جعبه‌ابزار `lsqnonlin` نرم افزار MATLAB برای حل مسأله معکوس استفاده شده است. این دستور بصورت $\mu_a = \text{lsqnonlin}(fun, \mu_{a0}, lb, ub, options)$ استفاده می‌شود. دستور فوق از مقدار اولیه μ_{a0} شروع کرده؛ یک کمینه برای مجموع مربعات تابع توصیف شده در `fun` پیدا می‌کند. تابع `fun` اختلاف بین داده‌های اندازه‌گیری و خروجی مسأله پیشرو را بدست می‌دهد. مقادیر `lb` و `ub` حدود بالا و پایین μ_a را طوری تعیین می‌کنند که $lb \leq \mu_a \leq ub$ باشد. همانطور که بیان شد مسأله معکوس در مقطع‌نگاری نوری پخشی، بدحالت است؛ یعنی مسأله معکوس دارای پاسخ یکتا نیست. با تعیین مقادیر مناسب برای `lb` و `ub` پاسخ مسأله معکوس را محدود می‌کنیم. `lsqnonlin` می‌تواند از روش‌های «گوس-نیوتون» یا «لونبرگ-مارکوارت» برای حل مسائل حداقل مربعات غیرخطی استفاده کند. در این مقاله از روش گوس-نیوتن استفاده شده است.

۵- نتایج شبیه سازی

در این بخش کاربرد روش المان محدود مرتبه بالا در مسأله پیشرو و بازسازی تصویر DOT با مثال‌هایی ساده نشان داده

$$\begin{aligned} \psi_1^e(x, y) &= \frac{1}{2} L_1^e (3L_1^e - 1)(3L_1^e - 2), \\ \psi_2^e(x, y) &= \frac{1}{2} L_2^e (3L_2^e - 1)(3L_2^e - 2), \\ \psi_3^e(x, y) &= \frac{1}{2} L_3^e (3L_3^e - 1)(3L_3^e - 2), \\ \psi_4^e(x, y) &= \frac{9}{2} L_1^e (3L_1^e - 1)L_2^e, \\ \psi_7^e(x, y) &= \frac{9}{2} L_2^e (3L_3^e - 1)L_3^e, \\ \psi_8^e(x, y) &= \frac{9}{2} L_3^e (3L_3^e - 1)L_1^e, \\ \psi_9^e(x, y) &= \frac{9}{2} L_1^e (3L_1^e - 1)L_3^e, \\ \psi_{10}^e(x, y) &= 27L_1^e L_2^e L_3^e, \end{aligned} \quad (4)$$

که در آنها L_j^e ($j=1, 2, 3$) چنین است:

$$L_j^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_j^e + b_j^e x + c_j^e y). \quad (5)$$

در رابطه (۵) Δ^e ، a_j^e ، b_j^e و c_j^e همانند رابطه (۳) تعریف می‌شوند. بنابراین توابع L_j^e دقیقاً همان توابع درونیابی برای یک المان مثلثی خطی هستند.

۳-۳- محاسبه شار خروجی

پس از انتخاب توابع پایه، مسأله به پیدا کردن بردار مقادیر گره‌ها $\Phi_j(t)$ محدود می‌شود که از آنها جواب در هر نقطه دیگری با استفاده از معادله (۲) به دست می‌آید. معادله دیفرانسیل (۱) پس از فرمول‌بندی سیستم معادلات با استفاده از روش «گالرکین»، به شکل ماتریسی زیر تبدیل می‌شود [۵]:

$$[K(k) + C(\mu_a c)] \Phi + M \frac{\partial \Phi}{\partial t} = Q + \beta \quad (6)$$

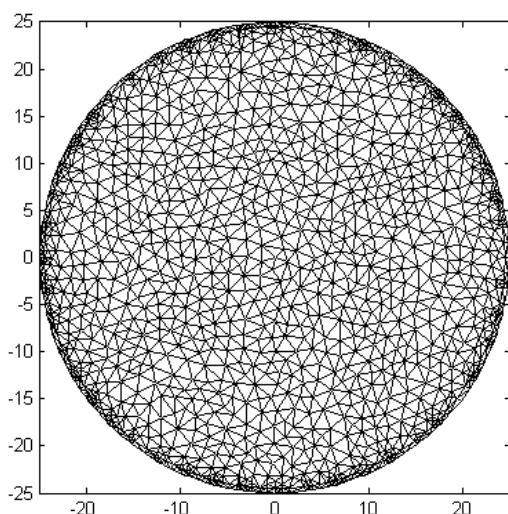
کمیت‌های K ، C ، M ، Q و β در [۵] معرفی شده‌اند.

پس از حل معادله (۶) چگالی فوتون در همه نقاط ناحیه بدست می‌آید، اما در مسأله پیشرو DOT به دست آوردن خروجی روی مرز یعنی شار Γ است. برای محاسبه شار خروجی از مرز، باید گرادیان چگالی فوتون در مرز $\partial\Omega$ را بدست آوریم. برای مقادیر مشخص $\Phi(t)$ ، شار $\Gamma(d, t)$ در هر نقطه d روی مرز $\partial\Omega$ از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۶]:

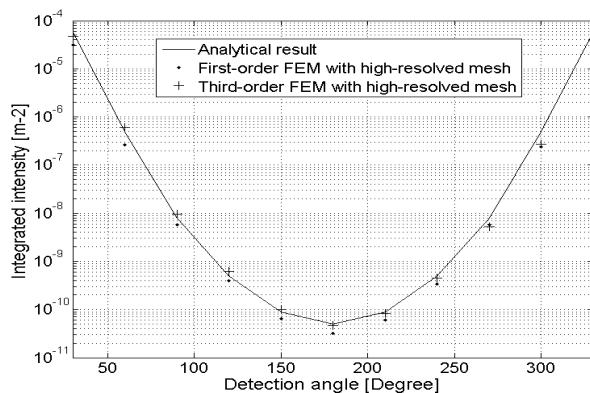
$$\Gamma(d, t) = \sum_{i|N_i \in \tau(d)} \Phi_i(t) k(d) \hat{n}(d) \cdot \nabla \psi_i(d) \quad (7)$$

در رابطه فوق مجموع تنها برای گره‌هایی انجام می‌شود که یک رأس از المان مرزی شامل نقطه d باشند.

(۳) نمایش داده شده‌اند. انحراف معیار برای اختلاف بین پاسخ تحلیلی و پاسخ حاصل از این دو روش محاسبه شده است. این مقدار برای روش المان محدود با توابع پایه مرتبه ۱ برابر 1.0×10^{-5} ، و برای روش المان محدود با توابع پایه مرتبه ۳ برابر 1.0×10^{-6} است. با بررسی نتایج مشخص می‌شود که پاسخ ناشی از توابع پایه مرتبه ۳ دقت بیشتری در مقایسه با پاسخ ناشی از توابع پایه مرتبه ۱ دارد.



شکل (۳) - مش‌بندی زیاد ریز شده با ۲۸۰۴ المان و ۱۵۲۱ گره (مش ۱).



شکل (۴) - مقایسه نتایج حاصل از روش المان محدود مرتبه ۱ و ۳ با استفاده از مش‌بندی زیاد ریز شده (مش ۱)، با پاسخ تحلیلی برای شدت شار انتگرال‌گیری شده.

شده است. این مثال‌ها بعنوان نمونه آزمایشی استفاده شده‌اند. برای طراحی و مدلسازی بهینه یک سیستم پیچیده، می‌توان از مثال ساده‌ای شروع کرد که جواب آن در دسترس و یا مطمئن است. این مثال می‌تواند معیاری برای سنجش سیستم باشد. از آنجایی که روش پیشنهادی یک روش عددی است، روش بازسازی تصویری که به آن اشاره شد، می‌تواند برای مسائلی با شکل‌های پیچیده‌تر نیز مورد استفاده قرار گیرد. همچنین بدلیل هزینه زیاد ساخت، مدلسازی امری ضروری در طراحی سیستم‌های پیچیده پزشکی است.

برنامه‌ها در نرم‌افزار MATLAB نوشته و مش‌ها نیز با جعبه ابزار PDETOOL این نرم‌افزار تولید شده‌اند.

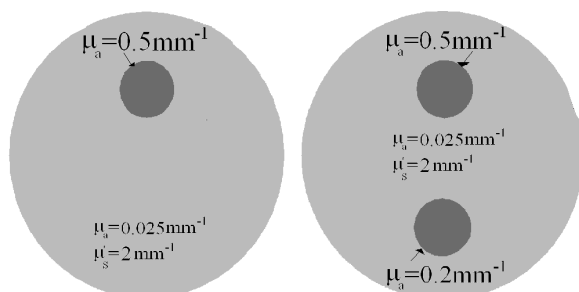
۱-۵- شبیه‌سازی مسأله پیشرو

در این مثال، نتایج حاصل از روش المان محدود مرتبه یک و سه را برای یک هندسه دایروی دو بعدی به شعاع 25 mm - که مدلی از مغز در نظر گرفته می‌شود- با پاسخ تحلیلی مقایسه می‌کنیم. هندسه و مشخصات فیزیکی مشابه مرجع [۱۶] در نظر گرفته شده‌اند. مقادیر ضرایب جذب و پراکنندگی کاهش یافته برابر $\mu_a = 0.025 \text{ mm}^{-1}$ و $\mu_s = 2 \text{ mm}^{-1}$ هستند. در نقطه $x = 25 \text{ mm}$ و $y = 0$ روی سطح یک لیزر پالسی در زمان $t = 0$ اعمال شده است. فرض می‌کنیم منبع نور یک منبع نقطه‌ای همه‌سویکسان باشد که در عمق $(x = 25 \text{ mm}, y = 0)$ داخل بافت قرار گرفته است. شار خروجی در ۱۱ نقطه روی سطح که در فواصل یکسان 30° از یکدیگر قرار گرفته‌اند؛ محاسبه شده است. شکل ۳ یک مش‌بندی زیاد ریز شده ۶ المان محدود را با ۲۸۰۴ المان و ۱۵۲۱ گره نشان می‌دهد. برای اینکه المان شامل منبع داخلی شود، یعنی منبع گره مرزی نداشته باشد؛ المان‌بندی ریزتری در نزدیکی مرز انجام شده است. شرایط مرزی نوع دیریشله و نوع داده شدت شار انتگرال‌گیری شده

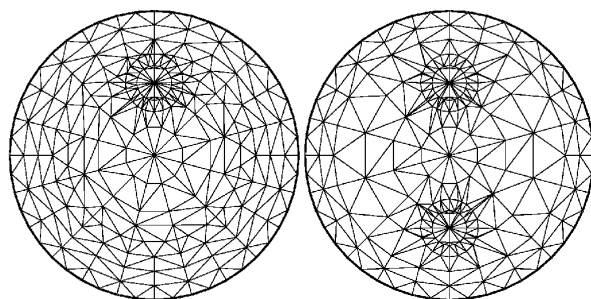
$$\text{است } (M^{(j)}(\xi_j) = E[\Gamma(\xi_j, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^{(j)}(\xi_j, t) dt$$

پاسخ تحلیلی نمونه فوق [۱۶] برای صحت‌سنجی روش پیشنهادی استفاده شده است. شکل (۴) شدت شار انتگرال‌گیری شده را به صورت تابعی از زاویه آشکارسازی نشان می‌دهد. در این شکل پاسخ تحلیلی و نتایج برگرفته از روش المان محدود با توابع پایه مرتبه اول و سوم برای مش‌بندی زیاد ریز شده شکل

نشان می‌دهد. نمونه سمت چپ دارای یک تومور با ضریب جذب $\mu_a = 0.5 \text{ mm}^{-1}$ و نمونه سمت راست دارای دو تومور با ضریب جذب‌های $\mu_a = 0.5 \text{ mm}^{-1}$ و $\mu_a = 0.2 \text{ mm}^{-1}$ است. تعداد ۲۰ منبع و ۲۰ آشکارساز در فواصل مساوی در اطراف مرز قرار گرفته‌اند. شکل (۸) مش‌بندی مورد استفاده برای تولید داده را نشان می‌دهد. این داده‌ها با استفاده از روش گوسی ساخته شده‌اند و کمترین دامنه داده‌های اندازه‌گیری دارای SNR ۱۰ دسیبل است. مش مورد استفاده برای بازسازی تصویر در شکل (۹) نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود در این مش‌بندی هیچ گونه اطلاعاتی درباره محل تومورها وجود ندارد. حدس اولیه برای ضریب جذب (μ_{a0}) در هر مورد یک توزیع همگن برابر مقدار پس‌زمینه در نظر گرفته شده است.

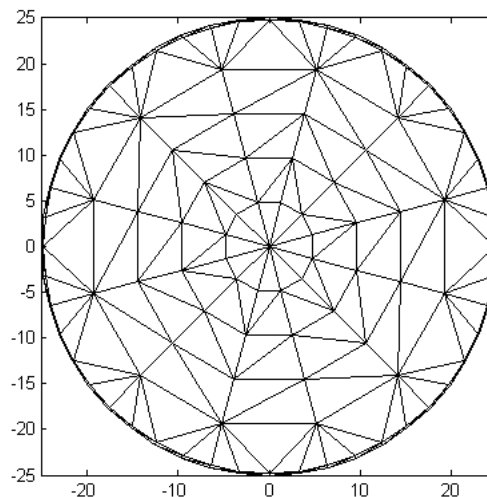


شکل (۷) - دو هندسه مورد استفاده برای بازسازی تصویر. مقادیر پارامترهای نوری برای قسمت همگن و تومورها در شکل نشان داده شده است.

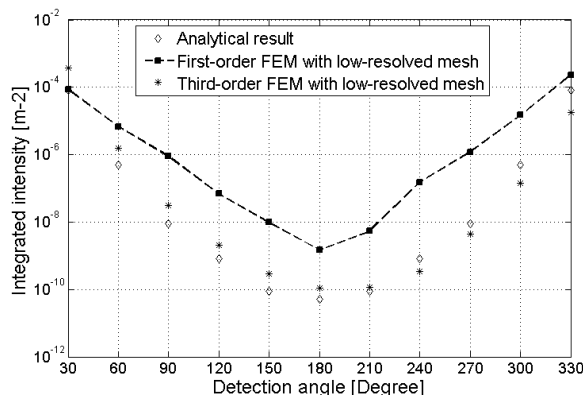


شکل (۸) - مش‌بندی مورد استفاده برای مدل‌سازی و تولید داده‌های اندازه‌گیری. مش‌بندی سمت راست شامل ۲۸۵ گره و ۵۲۰ المان و مش‌بندی سمت چپ شامل ۲۹۷ گره و ۵۴۴ المان است.

شکل ۵ یک مش‌بندی کم‌ریز شده^۷ المان محدود را با ۲۴۰ گره و ۱۴۵ المان نشان می‌دهد. در شکل (۶) شدت شار انتگرال‌گیری شده برگرفته از روش المان محدود با توابع پایه مرتبه ۱ و مرتبه ۳ برای مش‌بندی کم‌ریز شده شکل (۵) با یکدیگر مقایسه شده‌اند. این مقایسه نشان می‌دهد که پاسخ حاصل از روش المان محدود با توابع پایه مرتبه ۱ برای مش‌بندی کم‌ریز شده با پاسخ تحلیلی اختلاف زیادی دارد، آنکه پاسخ حاصل از روش المان محدود با توابع پایه مرتبه ۳ برای مش‌بندی کم‌ریز شده تطابق خوبی با پاسخ تحلیلی دارد.



شکل (۵) - مش‌بندی کم‌ریز شده با ۲۴۰ المان و ۱۴۵ گره (مش ۲).



شکل (۶) - مقایسه نتایج حاصل از روش المان محدود مرتبه ۱ و ۳ با استفاده از مش‌بندی کم‌ریز شده (مش ۲)، با پاسخ تحلیلی برای شدت شار انتگرال‌گیری شده.

۱-۵- شبیه‌سازی مسأله معکوس

شکل (۷) دو نمونه را با ضریب پراکندگی همگن $\mu_s' = 2 \text{ mm}^{-1}$ و ضریب جذب پس‌زمینه $\mu_a = 0.025 \text{ mm}^{-1}$

⁷ Low-resolved mesh

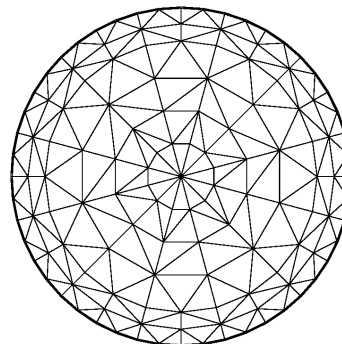
۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش المان محدود مرتبه بالا برای بازسازی تصویر در مقطع‌نگاری نوری پخشی استفاده شده است. هدف از این مطالعه افزایش دقت مسأله پیشرو هنگام استفاده از مش‌بندی با تعداد المان‌های کمتر بجای مش‌بندی زیاد ریز شده با تعداد المان‌های زیاد است. این امر باعث کاهش تعداد مجهولات در فرایند بازسازی تصویر، بدون کاهش دقت می‌شود. برای صحت‌سنجی نتایج المان محدود مرتبه اول و مرتبه بالا در مسأله پیشرو، نتایج عددی با پاسخ تحلیلی مقایسه شده‌اند.

بررسی‌ها نشان می‌دهد با استفاده از مش‌بندی زیاد ریز شده در مسأله پیشرو DOT، نتایج حاصل از روش المان محدود مرتبه یک و مرتبه سه به پاسخ تحلیلی نزدیک خواهند بود. علاوه بر آن نتایج نشان می‌دهند که با استفاده از مش‌بندی کم ریز شده با تعداد المان‌های کم، روش المان محدود مرتبه سه به پاسخ صحیحی می‌انجامد؛ حال آنکه پاسخ حاصل از توابع پایه مرتبه یک دارای خطای قابل توجهی خواهد بود. همچنین نتایج نشان می‌دهند که روش المان محدود مرتبه بالا با مش‌بندی کم‌ریز شده ابزار مفیدتری برای بازسازی تصویر در DOT است.

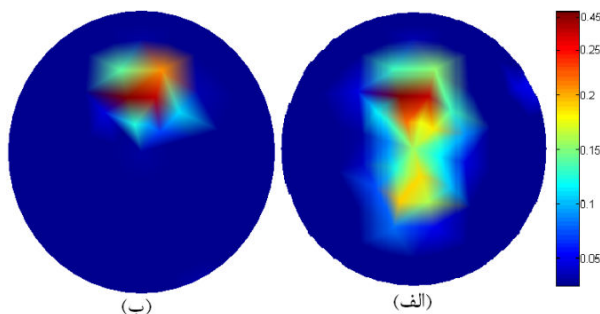
مراجع

- [1] Gibson A.P., Hebden J.C., Arridge S.R., Recent advances in diffuse optical imaging; *Phys. Med. Biol.*, 2005; 50: 1-43.
- [2] Schweiger M., Gibson A., Arridge S.R., Computational aspects of diffuse optical tomography; *Comput. Sci. Eng.*, 2003; 5: 33-41.
- [3] Boas D.A., Brooks D.H., Miller E.L., DiMarzio C.A., Kilmer M., Gaudette R.J., Zhang Q., Imaging the body with diffuse optical tomography; *IEEE Signal Process. Mag.*, 2001; 18: 57-75.
- [4] Arridge S.R., Hebden J.C., Optical imaging in medicine: II. Modelling and reconstruction; *Phys. Med. Biol.*, 1997; 42: 841-853.
- [5] Schweiger M., Arridge S.R., Delpy D.T., Application of the finite element method for the forward and inverse models in optical tomography; *J. Math. Imag. Vision*, 1993; 3: 263-283.
- [6] Sikora J., Zacharopoulos A., Douiri A., Schweiger M., Horesh L., Arridge S.R., Ripoll J., Diffuse photon propagation in multilayered geometries; *Phys. Med. Biol.*, 2006; 51: 497-516.
- [7] Zacharopoulos A.D., Three-dimensional shape-based reconstructions in medical imaging; Ph.D. dissertation, Univ. College London, Bloomsbury, London, U.K., 2004.



شکل (۹)- مش‌بندی مورد استفاده برای بازسازی تصویر نمونه‌های شکل ۷. این مش‌بندی شامل ۱۸۱ گره و ۳۱۲ المان است.

در این مقاله از روش‌های المان محدود مرتبه یک و سه برای حل مسأله پیشرو در فرایند بازسازی تصویر استفاده شده است. بخش‌های (الف) و (ب) در شکل (۱۰) به ترتیب بازسازی ضریب جذب برای نمونه ۱ و ۲ را با استفاده از روش المان محدود مرتبه سه نشان می‌دهند. در بخش (الف) این شکل محل دو تومور بطور تقریبی بازسازی شده؛ مقدار ضریب جذب تومورها نیز با توجه به نوار سمت راست به مقدار واقعی در نمونه سمت راست شکل (۷) نزدیک است. در بخش (ب) این شکل نیز محل جذب‌کننده و مقدار آن به طور مناسبی بازسازی شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، محل و اندازه تومورها با استفاده از روش المان محدود مرتبه سه به درستی بازسازی شده است. توضیح آنکه روش المان محدود مرتبه ۱ با همان تعداد المان مورد استفاده برای بازسازی تصویر با روش المان محدود مرتبه ۳، قادر به بازسازی تصویر نمونه‌های مورد بررسی نیست و این موضوع نشان‌دهنده کارایی روش المان محدود مرتبه ۳ در مقایسه با مرتبه ۱ برای حل مسأله معکوس است.



شکل (۱۰)- بازسازی تصویر برای نمونه‌های شکل (۷) با روش المان محدود مرتبه سه. الف- بازسازی ضریب جذب برای نمونه سمت راست، ب- بازسازی ضریب جذب برای نمونه سمت چپ.

- [8] Hielscher A.H., Klose A.D., Scheel A.K., Moa-Anderson B., Backhaus M., Netz U., Beuthan J., Sagittal laser optical tomography for imaging of rheumatoid finger joints; *Phys. Med. Biol.*, 2004; 1147-1163.
- [9] Pogue B.W., Patterson M.S., Jiang H., Paulsen K.D., Initial assessment of a simple system for frequency domain diffuse optical tomography; *Phys. Med. Biol.*, 1995; 1709-1729.
- [10] Elisee J.P., Gibson A., Arridge S., Combination of Boundary Element Method and Finite Element Method in Diffuse Optical Tomography; *IEEE TRANSACTIONS ON BIOMEDICAL ENGINEERING*, 2010; 57(11): 2737-2745.
- [11] Qin C., Tian J., Yang X., Liu K., Yan G., Feng J., Lv Y., Xu M., Galerkin-based meshless methods for photon transport in the biological tissue; *Optics Express*, 2008; 16: 20317.
- [12] Jafari Shapoorabadi R., Konrad A., Sinclair A.N., Comparison of three formulations for eddy current and skin effect problems; *IEEE Trans. on Magnetics*, 2002; 38(2): 617-20.
- [13] Jin J., *The finite element method in electromagnetic*; Wiley-IEEE Press, 2002.
- [14] Wang L.V., Wu H.I., *Biomedical optics principles and imaging*; John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [15] Silvester P.P., Ferrari R.L., *Finite elements for electrical engineers*; Cambridge University Press, 1996.
- [16] Arridge S.R., Schweiger M., Hiraoka M., Delpy D.T. A finite-element approach for modeling photon transport in tissue; *Med. Phys.* 1993; 20: 299-309.
- [17] Hadinia M., Jafari R., A high-order finite element method for forward problem in diffuse optical tomography; *International Symposium on Optomechatronic Technologies (ISOT)*, 2010.
- [18] Pursiainen S., Hakula H., A high-order finite element method for electrical impedance tomography; *Progress in Electromagnetics Research Symposium*, Cambridge, USA, March 2006, pp. 1-6.
- [19] Wang L.V., Wu H.I., *Biomedical optics principles and imaging*; John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [20] Ye J.C., Bouman C.A., Webb K.J., Millane R.P., Nonlinear multigrid algorithms for Bayesian optical diffusion tomography; *IEEE Trans. Image Processing*, 2001; 10: 909-922.
- [21] Arridge S.R., *Optical tomography in medical imaging*; *Inverse Problems*, 1999; 15: 41-93.
- [22] Schweiger M., Arridge S.R., Hiraoka M., Delpy D.T., finite-element method for the propagation of light in scattering media: boundary and source conditions; *Med. Phys.*, 1995; 22: 1779-1792.
- [23] Arridge S.R., Schweiger M., A general framework for iterative reconstruction algorithms in optical tomography, using a finite element method; *Computational Radiology and Imaging: Therapy and Diagnosis (IMA Volumes in Mathematics and its Applications 110)* ed C Borgers and F Natterer (New York: Springer), 1999: 45-70.