

Power Law: Relation between Geometry and Kinematics in Skilled Drawing Movements

S. Rashidi ^{1*}, M.R. Hashemi Golpayegani ², A. Fallah ³, F. Towhidkhah ⁴

¹ Instructor, Bioelectric Group, School of Biomedical Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

² Professor, Bioelectric Group, School of Biomedical Engineering, Amir Kabir University of Technology, Tehran, Iran, hashemi_g@morva.net

³ Assistant Professor, Bioelectric Group, School of Biomedical Engineering, Amir Kabir University of Technology, Tehran, Iran, a_fallah@aut.ac.ir

⁴ Associate Professor, Bioelectric Group, School of Biomedical Engineering, Amir Kabir University of Technology, Tehran, Iran, towhidkhah@aut.ac.ir

Abstract

In drawing movements, the constraints imposed on the trajectory geometry properties and kinematics are known with two laws: 2/3 power law and isochrony phenomenon. In this paper experiments have been designed to study the relation between two empirical laws in straight and curved patterns of drawing movements in 16-18 years old subjects. Providing two models of power is indicated that in drawing movements, invariant features can be defining. These features are independent of subject, direction and size of trajectory and together they can simplify the role of the upper motor control system and decrease the degrees of freedom and the computational complexity.

Key words: Arm Movement, Curvature, Isochrony, Handwriting, Motor Control, Two-Thirds Power Law.

* Corresponding author

Address: Saeid Rashidi, Biomedical Engineering School, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Golzar (B) All., Sardar'e Jangal Bol., Pounak Squ., Tehran, Iran

Tel: +98 21 44474321-4

Fax: +98 21 44474319

E-mail: rashidi.saeid@gmail.com

مدل توانی: قانون حاکم بر ویژگی‌های هندسی و حرکتی در الگوهای ترسیمی ماهرانه دست

سعید رشیدی^{۱*}، سید محمدرضا هاشمی گلپایگانی^۲، علی فلاح^۳، فرزاد توحیدخواه^۴

^۱ مربی، گروه بیوالکتریک، دانشکده مهندسی پزشکی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران
^۲ استاد، گروه بیوالکتریک، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران hashemi_g@morva.net
^۳ استادیار، گروه بیوالکتریک، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران a_fallah@aut.ac.ir
^۴ دانشیار، گروه بیوالکتریک، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران towhidkhah@aut.ac.ir

چکیده

در حرکات ترسیمی، خواص هندسی مسیر و ویژگی‌های حرکتی تحت قیودی خاص قرار دارند که با دو قانون توان دو-سوم و اصل شیب یکسان شناخته می‌شوند. در این مقاله با طراحی آزمون‌هایی درباره افراد ۱۶-۱۸ سال، به بررسی نوع ارتباط این دو قانون تجربی در حرکات مستقیم و منحنی شکل پرداخته می‌شود. با ارائه دو مدل توانی نشان داده می‌شود در الگوهای ترسیمی ویژگی‌های تغییرناپذیر قابل تعریف بوده که مستقل از فرد، جهت، چرخش و طول الگو است و در تعامل با یکدیگر علاوه بر ساده‌سازی نقش سیستم فوقانی کنترل حرکت، باعث کاهش تعداد درجات آزادی و پیچیدگی محاسبات می‌شوند.

کلیدواژگان: اصل شیب یکسان، انحناء، حرکت دست، دست‌نوشته، قانون توان دو-سوم، کنترل حرکت.

*عهده‌دار مکاتبات

نشانی: تهران، میدان پونک، سردار جنگل، گلزار یکم (ب)، دانشکده مهندسی پزشکی، واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی
 تلفن: ۴۴۴۷۴۳۲۱، دورنگار: ۴۴۴۷۴۳۱۹، پیام نگار: rashidi.saeid@gmail.com

۱- مقدمه

می‌شود که با بهینه‌سازی یک تابع هزینه، خروجی سیستم حرکتی را توصیف می‌کند. محققان در چند دهه اخیر، فرضیه‌های مختلفی را برای چنین راهبرد برنامه‌ریزی پیشنهاد کرده‌اند. تابع هزینه می‌تواند مجموع انرژی عملگرهای حرکتی [۶]، متوسط جرک^۵ [۷]، نرخ تغییرات گشتاور مفاصل [۸]، نسبت سیگنال به اغتشاش ذاتی سیستم حرکتی [۹] یا زمان اجرا بر پایه اصل فیزیکی عمل باشد [۱۰]. همچنین در نگرش پائین-بالا ابتدا تلاش می‌شود مجموعه‌ای از قیود حاکم بر ویژگی‌های حرکتی و جنبشی در سطوح مشاهده‌پذیر فرایند کنترل-حرکت تعریف شود و سپس اندیشه و دلایل نهان در شاخص‌های یافته‌های تجربی، از نقطه نظر اصول بهینه‌سازی، جستجو و توصیف گردند. تحقیقات مختلف نشان داده است زمانی که فرد حرکت در صفحه یا فضای دوبعدی مسیرهای بیضوی یا فی‌البداهه را انجام می‌دهد، یکتائی پاسخ سیستم حرکت از همبستگی زاویه مفاصل در مختصات مرجع اوایلر [۱۱] و یا وابستگی ویژگی‌های هندسی مسیر و جنبشی حرکت نتیجه می‌شود [۱۲].

در حرکات هدف‌دار دست، مسیر حرکت به وسیله تعدادی شاخص سازگار و ثابت مقید می‌شود که در شرایط مختلف مانند تغییر جهت، دامنه، سرعت و بار پایدار هستند. برای مثال در حرکات دستیابی، مسیر پیمایش نزدیک به خط مستقیم است در حالی که سرعت دارای یک طرح زنگوله‌ای برای حرکات نقطه به نقطه است [۱۳، ۱۴]. دو رابطه تجربی شناخته شده بین خواص هندسی مسیر و ویژگی‌های حرکتی در مطالعات متعدد مطرح شده است:

۱. قانون توان دو-سوم^۶: که از اواخر قرن نوزدهم به وسیله بینت^۷ و کورتیر^۸ پیشنهاد شد حاکی از رابطه مستقیم سرعت لحظه‌ای زاویه‌ای با انحناء در ترسیم الگوهای بیضوی است [۱۲-۱۶]:

$$V_{\theta}(t) = K.C(t)^{\frac{2}{3}} \quad (1)$$

به ترتیب سرعت زاویه‌ای و انحناء هستند و بر حسب متغیرهای شعاع $R(t)$ و سرعت مماسی $V(t)$ داریم:

$$V(t) = R(t).V_{\theta}(t) = K.R(t)^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

تحقیقات وودورث^۱ در اواخر قرن نوزدهم بر روی محدودیت‌های حرکات اختیاری و آزادانه نشان داد که در تعیین دقت بین زمان حرکت، دامنه و سرعت رابطه‌ای ذاتی وجود دارد و این موضوع سرآغازی در عرصه کنترل حرکت بود [۱]. از دیدگاه کنترلی دو چارچوب کلی برای درک مسئله حرکت به طور عام و حرکات ماهرانه به طور خاص مطرح شده است. تفاوت این دو چارچوب در پاسخ به سؤال "ماهیت و ساختار حرکات از کجا و چگونه شکل می‌پذیرند؟" نهفته است. در دیدگاه اول طبق نظریه برنامه حرکتی، شکل و ساختار حرکات از بازنمایی یک فرمان حرکتی فشرده ذخیره شده در سیستم عصبی مرکزی^۲ (CNS) حاصل می‌شود [۲]. بنابراین برای آغاز یک حرکت جزئیات آن مانند زمان‌بندی نسبی و دامنه، به یک طرح و نقشه حرکت نگاشت می‌شود. این نگرش کنترلی به نام راهبرد بالا-پائین^۳ شناخته می‌شود. در دیدگاه دوم بر توانائی و ویژگی‌های غیر خطی سیستم حرکتی برای تحقق یک حرکت بهینه شده تأکید شده و راهبرد پائین-بالا^۴ نامیده می‌شود [۳].

در هر دو دیدگاه باید توجه داشت که یک مدل درونی برای بازنمایی مسیر و تنظیم اعضای حرکتی قبل از اجرا نیاز است. بنابراین درک چگونگی تبدیل مدل داخلی به مجموعه‌ای از فرامین حرکتی بسیار حائز اهمیت است. این امر یکی از مشکلات اساسی در کنترل حرکت است زیرا هندسه سیستم ترکیبی بازو-ساعد-پنجه از تعداد زیادی درجه آزادی برخوردار است که کنترل این مجموعه نیازمند پردازش حجم بالای اطلاعات از مسیرهای مستقیم و بازخوردیست که در زمان اجرا مقدور نیست [۴].

حرکات اعضای مختلف به وسیله ساختارهای مکانیکی و نیز محاسبات سازمان یافته، کنترل و محدود می‌شوند [۵]. اما حرکات اجرا شده تحت نظارت یک راهبرد کلی قرار دارد که CNS در طرح‌ریزی مشخص می‌کند و می‌تواند مجموعه‌ای از حرکات هم‌خانواده باشد. در نگرش بالا-پائین این راهبرد تحت شرایط و روابط ریاضی متعددی تعریف

¹ Woodworth⁵ Jerk² Central Nervous System⁶ Two-Thirds Power Law³ Top-Down⁷ Binet⁴ Bottom-Up⁸ Courtier

شال^{۱۲} و استرناد^{۱۳} نیز نشان دادند در حرکات شبه سینوسی، همواری مسیر حرکت و قانون توان فضائی مناسب برای تبدیل ویژگی‌های حرکتی در مفاصل را فراهم می‌آورند [۲۰]. در تحقیق دیگری بر پایه تحلیل مدل جنبشی حرکات متناوب دست ثابت کردند قانون توان از تخمین ویژگی‌های حرکتی مفاصل شانه و آرنج منتج می‌شود [۲۱].

این یافته‌ها حاکی از آن است که دو قانون مذکور بر تمایل ذاتی سیستم عصبی-عضلانی برای ثابت نگهداشتن سرعت زاویه‌ای در اجرای الگوهای پیچیده دلالت دارد بدین شکل که سیستم با تقطیع الگوها به قطاع‌های ساده و با انحنای ثابت آن را میسر می‌سازد. این اصول احتمال وجود یک راهبرد درونی را در لایه‌های فوقانی سیستم عصبی بیان داشته که در دو راستا قابل توجیه است [۲۲]:

۱. ایجاد حرکات هموار و سریع؛

۲. کاهش درجه آزادی سیستم کنترلی- حرکتی.

مطالعات نشان داده‌است که برای گروهی از حرکات نقطه به نقطه و تعقیب کنائی متناوب، قانون توان دو- سوم از تحلیل ریاضی مدل هوگان^{۱۴} یا کمینه جرک منتج می‌شود [۲۳]. مدل هوگان بر پایه حداقل مقدار انتگرال مربع n امین مشتق مختصات دست استوار است:

$$C_n = \int_0^T \left\{ \left(\frac{d^n x}{dt^n} \right)^2 + \left(\frac{d^n y}{dt^n} \right)^2 \right\} dt \quad (4)$$

T مدت زمان یا دوره تناوب حرکت است. این مسئله بر پایه معادله اوایلر^{۱۵}-لاگرانژ^{۱۶} حل می‌شود که بیانگر مسیر حرکت مستقیم با منحنی سرعت متقارن زنگوله‌ای شکل است. هر چند مدل هوگان قانون توان را برای برخی حرکات پیش‌بینی می‌کند ولی برای منحنی‌های حرکتی مانند رز چهار برگ، مقدار $\beta = 0/42$ را معین می‌کند.

از سوی دیگر تاکنون محققان قادر به ارائه یک راهبرد پائین- بالا با قابلیت توصیف منطقی مسئله تعدد درجات آزادی نشده‌اند. مشخصات مسیر و ویژگی‌های حرکتی دست از سیستم ترکیبی زمان وقوع گشتاورها و جرم مجموعه، محاسبه می‌شود. معادلات توصیف‌گر سیستم با درجات آزادی متعدد می‌تواند بسیار پیچیده و غیرخطی باشد. حل معکوس این معادلات برای رایانه‌های قدرتمند نیز زمانبر

ضریب K که اغلب به بهره سرعت تشبیه می‌شود تقریباً مقداری ثابت دارد. اگر چه قانون فوق کلی است ولی موارد متعدد نقض نیز گزارش شده است. برای مثال ضریب K در حرکات ترسیمی و نوشتاری در اتصال قطعات به یکدیگر تغییر می‌کند و به اندازه و مقدار خروج از مرکز مسیرهای بیضوی بستگی دارد [۱۲]. برای تطابق این قانون بر گروه وسیع‌تری از الگوهای حرکتی پیچیده، قاعده فوق به شکل رابطه (۳) اصلاح گردید [۱۷].

$$V(t) = K_i \cdot \left(\frac{R(t)}{1 + \alpha R(t)} \right)^\beta \quad (3)$$

که $\beta \approx 0/33$ و $\alpha = 0/05$ و تغییرات گسسته ضریب K_i

در هر قطعه به وسیله CNS تعیین می‌شود.

۲. اصل شیب یکسان^۹: بیانگر وابستگی سرعت متوسط و طول مسیر است که برای الگوهای ترسیمی ساده و تکراری برقرار می‌شود. این اصل بیان می‌کند زمان اجرای قطاع‌های با طول متفاوت یکسان است به نحوی که سیستم کنترلی- حرکتی با تعیین سرعت لازم آن را تحقق می‌بخشد.

قانون توان دو- سوم و اصل شیب یکسان قادرند برای توصیف دو جنبه مکمل سرعت یعنی تغییرات لحظه‌ای و مقدار متوسط آن، قواعد تفسیری ایجاد کنند. زیرا سرعت حرکت به وسیله موقعیت و سرعت زاویه‌ای مفاصل به طور یکتا مشخص می‌شوند و این روابط تجربی بیانگر مجموعه‌ای از قیدها برای تطابق گشتاورها بوده که نوع پاسخ‌های احتمالی ناشی از فرامین حرکتی برای اجرای حرکت مطلوب را محدود می‌سازد. قانون توان دو- سوم نه تنها ایجاد حرکات فی‌البداهه را مقید می‌سازد بلکه همچنین قابلیت یک مدل بیرونی برای بازآفرینی یک تعقیب کنائی^{۱۰} دقیق را محدود می‌کند. برخی مطالعات نشان داده است که تولید حرکات هدفمند دقیق به وسیله مدل‌های پویا و بر پایه این قواعد امکان‌پذیر نیست [۱۸].

محققان فرضیه دیگری را نیز برای منشاء این اصول پیشنهاد کرده‌اند که آن را ناشی از عملکرد برخی اعضاء و نه کنترل سیستم مرکزی می‌دانند. گریبل^{۱۱} و همکاران مشخص ساختند که ویژگی‌های پویای دست و خواص فتر مانند عضلات می‌تواند به قانون توان دو- سوم منجر شود [۱۹].

⁹ Isochorny
¹³ Sternad

¹⁰ Point to Point Reaching Movements
¹⁴ Hogan

¹¹ Gribble
¹⁵ Euler

¹² Schaal
¹⁶ Lagrange

این ابزار دارای قلمی مانند قلم معمولی است که اطلاعات را به صورت بی‌سیم و با امواج رادیویی ارسال می‌کند و این شباهت باعث احساس طبیعی اجرای آزمون‌ها شده و عامل روانی منفی برای فرد ایجاد نمی‌نماید. با توجه به بیشینه محتوای فرکانسی در ترسیم الگوهای نوشتاری که 10 Hz گزارش شده [۲۴] و پردازش‌های آتی مانند مشتق‌گیری عددی نرخ نمونه‌برداری ۱۰۰ انتخاب شد.

۱-۲- پیش پردازش

پیش پردازش سه فرایند فیلتر و هموارسازی، کاهش نرخ نمونه‌برداری و مشتق‌گیری عددی را شامل می‌شود. برای کاهش اثرات اغتشاش حاصل از نمونه‌برداری یک فیلتر گوسی غیرعلی^{۲۰} استفاده گردید که از ایجاد نقاط بیشینه یا کمینه جدید به سیگنال‌های سرعت و شتاب اجتناب می‌شود. برای درونیابی و مشتق‌گیری توابع اسپلاین^{۲۱} ابزاری بهینه بوده که همواری سیگنال را نیز موجب می‌شوند [۲۵].

۲-۲- روند انجام آزمون

ترسیم الگوها به صورت تقلید مستقیم انجام می‌گیرد بدین معنی که طرح الگوها بر روی صفحه ترسیم قرار دارد. روند زمانی اجرای هر کوشش در شکل ۱ مشاهده می‌شود. شروع هر کوشش با بوقی به مدت زمان 50 ms اعلان و سپس هدف بر روی نمایشگر (با فاصله یک متر از فرد) نشان داده می‌شود. هدف بعد از زمان مشخص محو شده و زمان دریافت با یک تأخیر تصادفی و صدای بوق دیگری آغاز و در انتها بعد از انجام آزمون، الگوی ترسیمی و هدف با همان سرعت به عنوان بازخورد ارائه می‌گردد.

بوده حال آنکه سیستم کنترل- حرکت در زمان کوتاهی بدون حل معادلات دیفرانسیل پیچیده پاسخ را به عضلات اعمال می‌کند. فرضیه‌های مختلفی مانند نقطه تعادل^{۱۷} و مسیر مجازی^{۱۸} (داخلی) در این راستا مطرح شده‌اند [۲۳]. جذابیت فرضیه نقطه تعادل در کاهش پیچیدگی محاسبات طرح‌ریزی حرکت نهفته است و فقط لازم است ویژگی‌های خاصی از حرکت تعریف گردد، در حالی که جزئیات مانند مشخصات هندسی و جنبشی حرکت از خواص ذاتی سیستم عضله مانند چسبندگی و کشسانی نتیجه می‌شود. هر چند این فرضیه نیز در حرکات پیچیده موفق عمل نمی‌کند.

در این مقاله بر رابطه بین خواص هندسی مسیر حرکت و ویژگی‌های حرکتی الگوهای ترسیمی تمرکز شده است. با طراحی آزمایش‌های مختلف و با مدلسازی متغیرهای هندسی و جنبشی حرکت، مجموعه‌ای از معادلات وابسته با تغییرات قانونمند در قبال یکدیگر ارائه شده است که قادر به توصیف رابطه درونی قانون توان دو- سوم و اصل شیب یکسان باشد و ضمن فراگیر بودن بتواند موارد نقض این قوانین در تحقیقات گذشته را تفسیر نماید.

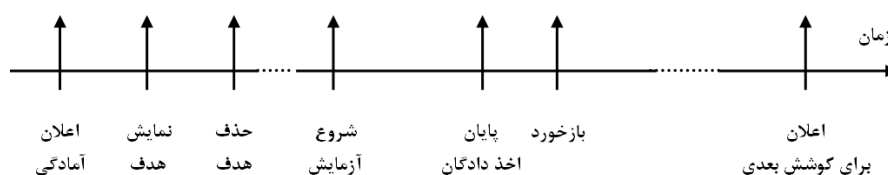
۲- دریافت دادگان و روش اجرا

در همه آزمون‌ها ۱۶ داوطلب پسر (دانش‌آموز رشته ریاضی) در رده سنی ۱۶-۱۸ حضور داشتند. همگی آنها راست‌دست و با دید طبیعی بدون عینک بودند که سابقه بیماری عصبی یا عضلانی نداشتند. برای دریافت اطلاعات ورودی یعنی موقعیت الگوی ترسیمی (x, y) از صفحه ترسیم مدل سوما پد^{۱۹} استفاده شد که دارای مشخصات زیر است:

- ابعاد مؤثر صفحه: $152 \times 203\text{ mm}$

- قدرت تفکیک‌پذیری: 100 pmm

- دقت: $\pm 0.25\text{ mm}$



شکل ۱- روند زمانی آزمون

¹⁷ Equilibrium Point

¹⁸ Virtual Trajectory

¹⁹ Summa PAD

²⁰ Non Causal

²¹ Spline Function

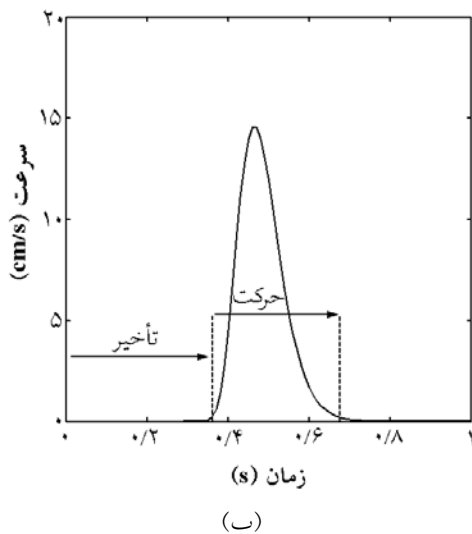
انتخاب می‌شود تا فرایند پیش‌بینی فرد دخالتی در برنامه‌ریزی حرکتی نداشته باشد.

آزمون‌ها هر روز در دو جلسه صبح و عصر برگزار شد که طی آن الگو با یک طول مشخص و در همه راستاها مورد آزمایش قرار گرفته و این عمل در ۳ روز متوالی تکرار می‌شود. هر آزمایش ۵ بار صحیح تکرار می‌گردد.

با توجه به قید حداکثر سرعت-دقت در اجرا و به طور کلی در حرکات ماهرانه و سریع که زمانی برای سیستم باقی نمی‌ماند تا فرایند بازخورد را در مورد خطا و اصلاح حرکت به کار گیرد، حرکت به شکل حلقه باز سازمان می‌یابد و به صورت از پیش برنامه‌ریزی شده و با حداقل اطلاعات حسی اجرا می‌شود [۲۶]. در این فرایندها سرعت دارای طرح زنگوله‌ای است و با تغییرات دامنه، دوره زمانی حرکت و نوع هدف، ساختار کلی آن حفظ می‌شود [۲۷]. در این آزمایش هر خط بیانگر یک ضربه نوشتاری^{۲۲} با منحنی سرعت مطابق شکل ۲-ب است.

به منظور کاهش تغییرپذیری نتایج، از دادگان میانگین‌گیری به عمل آمد. از آنجا که هر فرد دارای تأخیر در شروع حرکت است برای محاسبه زمان تأخیر و حرکت از سیگنال سرعت مماسی لحظه‌ای استفاده شد. برای تعیین سرعت مماسی، مشتق زمانی هر یک از مؤلفه‌های حرکتی به کمک توابع اسپلاین محاسبه شد (رابطه ۵).

$$V(t) = \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)} \quad (5)$$



افراد روی صندلی قابل تنظیم می‌نشستند تا احساس راحتی کنند. فرد الگوها را تحت شرایط حداکثر سرعت-دقت و در دفعات مشخص (بسته به نوع آزمون) ترسیم می‌کند. از آزمون‌های توأم با خطا صرف‌نظر می‌شود. موارد خطا عبارت‌اند از:

$$700 \text{ ms} \leq RT \leq 1000 \text{ ms}$$

- اشتباه در تشخیص هدف

- حرکت پیش از شروع آزمون

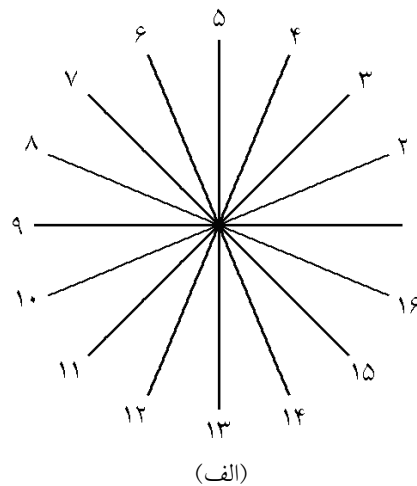
- برداشتن قلم از صفحه

در ابتدای جلسات، تمرینات اولیه برای آشنایی با سیستم و کسب آمادگی روانی به مدت ۵ دقیقه صورت می‌گیرد. از آنجا که هدف، بررسی الگوهای مهارت یافته است بنابراین بعد از چندین جلسه انجام آزمون‌ها و طی دوران گذرای آموزش، دادگان آخرین اجرا ملاک عمل است. تعداد جلسات وابسته به آزمون تعیین می‌شود.

۳- آزمون‌ها

۳-۱- آزمون اول

در این آزمون الگوی خطوط مستقیم در جهت‌های مختلف و طول‌های متفاوت مورد توجه است که در شکل ۲-الف مشاهده می‌شود. در الگوی فوق زاویه بین خطوط متوالی $22/5^\circ$ است که در اندازه‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ سانتیمتر طراحی شد. افراد آزمودنی باید هر الگو را از نقطه مرکزی به سمت خارج ترسیم کنند. ترتیب اجرا به صورت تصادفی



شکل ۱- آزمون اول: الف) الگوی آزمون؛ ب) منحنی سرعت یک ضربه نوشتاری

۲-۱-۳- تأثیر دامنه حرکت

بررسی چگونگی تغییرات زمان حرکت و سرعت بیشینه بر حسب طول الگو نشان می‌دهد که رابطه زمان حرکت با طول در فضای لگاریتمی به صورت خطی بوده که با استفاده از برازش خطی داریم:

$$\begin{aligned} \ln T &= \alpha_1 \cdot \ln D + \ln T_0 \\ \Rightarrow T &= T_0 \cdot D^{\alpha_1} \end{aligned} \quad (۶)$$

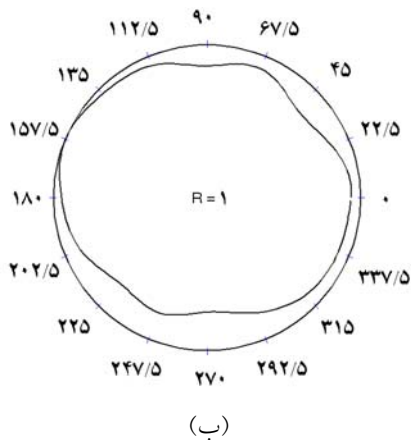
که در آزمایش‌ها $T_0 = 0/150$ و $\alpha_1 = 0/123$ به دست آمد. همچنین در فضای لگاریتمی، بیشینه سرعت تابعی خطی از طول الگو بوده که می‌توان یک رابطه نمائی (رابطه ۷) بر آن برازش کرد:

$$\begin{aligned} \ln V_{max} &= \alpha_2 \cdot \ln D + \ln K_0 \\ \Rightarrow V_{max} &= K_0 \cdot D^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آزمایش‌ها $K_0 = 14/88$ و $\alpha_2 = 0/891$ به دست آمد. وجود چنین رابطه توانی در برخی مطالعات گذشته نیز گزارش شده است [۲۸، ۲۹]. با استفاده از روابط (۶) و (۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &\approx 1 \\ \frac{V_{max}}{V_{mean}} &= \frac{V_{max}}{D/T} = \frac{V_{max} \cdot T}{D} = K_0 \cdot T_0 \cdot D^{1-(\alpha_1 + \alpha_2)} \\ &= K_0 \cdot T_0 \approx 2.22 \end{aligned} \quad (۸)$$

بررسی مستقیم نسبت بیشینه سرعت به متوسط سرعت بر حسب طول الگوهای آزمون حاکی از استقلال آن از دامنه حرکت است که مقدار میانگین آن در آزمایش‌ها برابر ۲/۱۷ به دست آمده است. این نتیجه با مقدار حاصل از رابطه (۸) کاملاً همخوانی دارد.

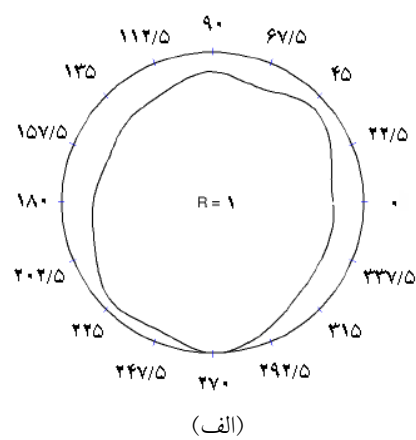


(ب)

زمان آغاز ترسیم، لحظه‌ایست که سرعت به مقدار $0/1 V_{max}$ برسد. با تعیین زمان تأخیر یا آغاز ترسیم و انتقال آن به سیگنال‌های موقعیت (x, y) بخش‌های تأخیر و ترسیم محاسبه و سپس میانگین متغیر مورد نظر حاصل می‌شود.

۱-۱-۳- تأثیر جهت حرکت

در شکل ۳ منحنی‌های قطبی بیشینه سرعت، مدت زمان و زمان وقوع بیشینه سرعت مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده وابستگی این متغیرها به جهت است. مطابق این نتایج در راستاهای مایل ۳ و ۱۱ نیز در دو جهت عمود ۵ و ۱۳ اجرای الگو در کمترین زمان و با بیشترین سرعت صورت می‌پذیرد حال آنکه سیستم کنترل حرکت در جهت‌های افقی ۱ و ۹ همچنین راستاهای ۷ و ۱۵، زمان طولانی‌تری را طلب می‌کند. به نظر می‌رسد که سیستم عصبی-عضلانی در جهت‌های سریع‌تر از هماهنگی بیشتری برخوردار است زیرا سیستم‌های حرکتی انگشتان، پنجه، آرنج و شانه در جهت‌های مایل، در یک جهت یعنی باز یا بسته شدن عمل می‌کنند و به عبارتی سیستم دارای درجه آزادی کمتری است. ولی در جهت‌های دیگر این اعضاء در تقابل با یکدیگر حرکت دارند و نیاز به شدت کنترل بالاتر داشته و بنابراین درجه آزادی آن نیز افزایش می‌یابد.



(الف)

شکل ۳- منحنی‌های قطبی (ابتدا برای طول‌های مختلف، میانگین‌گیری و نسبت به بزرگ‌ترین آنها مقیاس شده‌اند).

(الف) بیشینه سرعت؛ (ب) مدت زمان حرکت

نتیجه فوق وجود رابطه خطی میان بیشینه سرعت با دامنه حرکت را نشان می‌دهد که با مراجع [۲۹] و [۳۲] سازگار است.

اگر حرکات با دامنه مختلف در زمان یکسان اجرا شوند، مدل پیشنهادی یک رابطه معکوس را میان بیشینه سرعت و زمان حرکت پیش‌بینی می‌کند.

$$V_{max}T = K_0T_0 \cdot D^{\alpha_1 + \alpha_2} = K_0T_0 \cdot D \quad (11)$$

$$\Rightarrow V_{max} = \frac{K_0T_0 \cdot D}{T} = \frac{K}{T}$$

رابطه (۱۱) با نتایج مطالعات ناگازاکی و پلامندون مشابه است [۲۹، ۳۰]. پیش‌بینی دیگر مدل ارتباط میان خطای زمانی ΔT و خطای مکانی ΔD در حرکات با دامنه و زمان مختلف است.

$$T = T_0 \cdot D^{\alpha_1} \Rightarrow \Delta T = T_0 \alpha_1 D^{\alpha_1 - 1} \cdot \Delta D$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{\alpha_1 \cdot \Delta D}{D} \quad (12)$$

که با نتایج مطالعه جامع و تطبیقی مرجع [۳۳] مطابقت دارد.

۳-۲- آزمون دوم

آزمون دوم بر اساس الگوی شکل ۴ ترسیم یک بیضی با تغییر نسبت قطر کوچک به بزرگ در اندازه‌های مختلف و در جهت‌های چهارگانه است. افراد شرکت‌کننده الگوها را به صورت تقلید مستقیم از نقطه شروع و در دو جهت ساعتگرد و پادساعتگرد اجرا می‌کنند. اندازه بیضی‌ها عبارت‌اند از:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (13)$$

$$\frac{b}{a} = 0.3, 0.35, 0.4, 0.45$$

$$a = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

نلسون^{۲۳} شاخص $\frac{V_{max}}{V_{mean}}$ را تعریف و ناگازاکی^{۲۴} در حرکات با دامنه ثابت و زمان متغیر مورد استفاده قرار داد که مقدار آن برابر ۱/۹۵ گزارش شد [۳۰]. پلامندون^{۲۵} بر پایه مدل لگ نرمال^{۲۶} نشان داد که این نسبت ثابت و تقریباً برابر ۲/۷۷ است [۳۱]. در مقاله تحلیلی ریچارسون^{۲۷} و فلش^{۲۸} رابطه (۹) بر اساس بهینه‌سازی ثابت می‌شود [۲۳]:

$$\frac{V_{max}}{V_{mean}} = \frac{(2n-1)!}{4^{n-1}(n-1)!} \quad (9)$$

که n درجه مدل بهینه است. برای مدل کمینه جرک ($n=3$) شاخص $\frac{V_{max}}{V_{mean}} = 1/875$ و در مدل کمینه اسنپ^{۲۹} ($n=4$) برابر ۲/۱۸۶ است هر چند رابطه فوق برای n های بزرگ صادق نیست.

۳-۱-۳- تحلیل آماری

تحلیل آماری واریانس^{۳۰} (ANOVA) داده‌های حاصل در جدول ۱ نمایش داده شده است. برخی از متغیرها ۱۰۰٪ وابسته و برخی نیز مستقل از متغیرهای وابستگی‌اند. سه شاخص $\frac{V_{max}}{V_{mean}}$ ، $\alpha_1 + \alpha_2$ و $K_0 \cdot T_0$ مستقل از فرد، جهت و دامنه حرکت هستند که نشانه ذاتی بودن آنها در اجرای حرکات مهارتی ترسیمی دارد.

۳-۱-۴- پیش‌بینی مدل

با استفاده از دو معادله (۶) و (۷) می‌توان در شرایط مشابه برخی نتایج حاصل در تحقیقات گذشته را به دست آورد. در حرکات با دامنه متفاوت و زمان حرکت یکسان داریم:

$$T = T_0 \cdot D^{\alpha_1} = \text{cons.} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 1 \quad (10)$$

$$\Rightarrow V_{max} = K_0 \cdot D$$

جدول ۱- تحلیل آماری متغیرهای حرکتی در آزمون اول

وابستگی به دامنه		وابستگی به جهت		وابستگی به شخص		متغیر
F(۷, ۱۲۰)	P	F(۱۵, ۲۴۰)	P	F(۱۵, ۲۴۰)	P	
ندارد		ندارد		۳/۳۷۲	۰/۰۰۰۰۳	تأخیر
٪۱۰۰		۲/۵۲۶	۰/۰۰۱۷	۲/۲۰۷	۰/۰۰۰۶۸	زمان اجرا
٪۱۰۰		۲/۲۲۵	۰/۰۰۰۶۳	۳/۰۴۹	۰/۰۰۰۰۱۶	سرعت بیشینه
ندارد		ندارد		ندارد		سرعت بیشینه به میانگین
ندارد		ندارد		ندارد		$\alpha_1 + \alpha_2$
ندارد		ندارد		ندارد		$K_0 \cdot T_0$

²³ Nelson
²⁷ Richardson

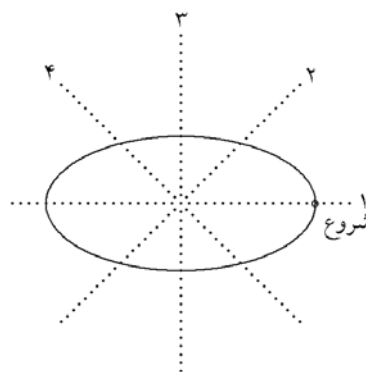
²⁴ Nagasaki
²⁸ Flash

²⁵ Plamondon
²⁹ Snap

²⁶ Log-Normal
³⁰ Analysis of Variance

۱-۲-۳- تأثیر جهت حرکت

در شکل ۶ تأثیر جهت ترسیم یا به عبارتی زاویه قطر اصلی بیضی نسبت به محور افق (با توجه به اجرای الگوها در تنها جهت ۴، جهت ۴ جهت دیگر به علت تقارن بیضی به صورت متقارن با ۴ جهت اولیه فرض شده‌اند) نشان می‌دهد که سرعت بیشتر در دو جهت ۲ و ۶ و سرعت کمتر در دو جهت ۴ و ۸ تحقق می‌یابد ضمن اینکه جهت عمودی نسبت به افقی سریع‌تر اجرا می‌شود که مشابه نتایج آزمون اول است.



شکل ۴- الگوی آزمون دوم

۲-۲-۳- تأثیر طول الگو و اصل شیب یکسان

تغییرات زمان اجرای الگو بر حسب محیط بیضی در شکل ۷- الف نشان می‌دهد: ۱. این رابطه در مقیاس لگاریتمی تقریباً تابعی خطی است و ۲. نسبت قطرهای بیضی در تعیین متغیرهای تابع مذکور اثرگذار است. منحنی‌ها برای تعداد ۸ چرخش محاسبه و سپس متوسط‌گیری شد. بر پایه برازش خطی برای نمودار شکل ۷- الف داریم:

$$T = T_0 \cdot P^{\beta_1}$$

$$\frac{b}{a} = 0.3 : \begin{cases} T_0 = 0.392 \\ \beta_1 = 0.375 \end{cases} \quad \frac{b}{a} = 0.35 : \begin{cases} T_0 = 0.364 \\ \beta_1 = 0.357 \end{cases} \quad (14)$$

$$\frac{b}{a} = 0.4 : \begin{cases} T_0 = 0.348 \\ \beta_1 = 0.341 \end{cases} \quad \frac{b}{a} = 0.45 : \begin{cases} T_0 = 0.323 \\ \beta_1 = 0.333 \end{cases}$$

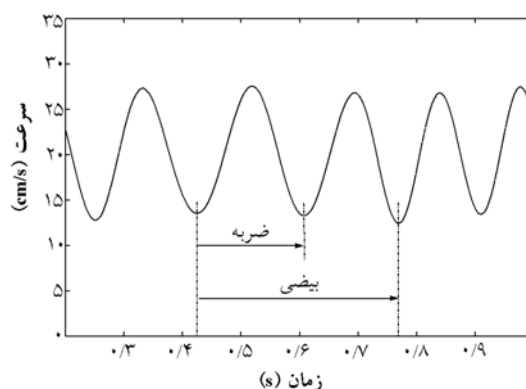
نتایج فوق نشان می‌دهد که با کاهش نسبت اقطار مقادیر T_0 و β_1 افزایش می‌یابد ولی وجود رابطه‌ای از نوع نمائی پابرجاست.

شکل ۷- ب نشان می‌دهد که نوع چرخش یعنی ساعتگرد یا معکوس آن بر رابطه (۱۴) مؤثر است به نحوی که شیب‌ها تقریباً ثابت ولی مقدار T_0 در چرخش ساعتگرد کوچک‌تر است. شایان ذکر است که این نمودار برای نسبت اقطار ۰/۴ ترسیم شده‌است.

شاخص $\frac{1}{T_0}$ که بیانگر فرکانس پایه فرد در ترسیم الگوها است حاکی از تلاش سیستم عصبی مرکزی برای ثابت نگهداشتن مؤلفه اصلی فرکانسی در حرکات تکراری است و فرکانس واقعی هر الگوی حرکتی از مقیاس توانی طول الگو منتج می‌شود.

افراد موظف بودند آزمون‌های مربوط را طی پنج روز متوالی و در هر روز دو جلسه اجرا نمایند. جهت چرخش، اندازه و زاویه ترسیم تصادفی تعیین می‌شود. نحوه انجام بدین شکل است که فرد تحت شرایط حداکثر سرعت- حداکثر دقت الگو را به صورت پیوسته برای حداقل ۱۰ مرتبه می‌پیماید. الگوها در هر جلسه تنها یک‌بار مورد آزمون قرار می‌گیرد.

پردازش‌ها و نتایج آتی بر مبنای میانگین متغیرهای حرکتی محاسبه شده‌است بدین شکل که هر کوشش به فضای سرعت انتقال یافته و سپس با توجه به این مطلب که هر منحنی بیضی دارای دو ضربه نوشتاری بوده بنابراین دارای دو مقدار بیشینه سرعت است، می‌توان نقاط شروع و پایان کوشش حرکتی را برای تعیین متوسط متغیرهایی مانند محیط، زمان اجرا و سرعت الگو را به‌دست آورد (شکل ۵). در فرایند مذکور چرخش‌های میانی فرد در یک کوشش مدنظر بوده (۸ چرخش برای همه الگوها) و از اجرای دور اول و آخر صرف‌نظر شده‌است.



شکل ۵- منحنی سرعت اجرای الگوی بیضی

$$V(t) = K \cdot R(t)^{\beta_2}$$

$$P=13.1 : \begin{cases} K=12.1 \\ \beta_2=0.324 \end{cases} \quad (16)$$

$$P=39.6 : \begin{cases} K=22.4 \\ \beta_2=0.341 \end{cases}$$

مقادیر β_2 حاصل، اختلاف کمی با ۰/۳۳ دارد هر چند که K وابسته به اندازه محیط بیضی است. این نتیجه حاکی از وجود رابطه‌ای میان ضریب K و P است. در بررسی چنین فرضی، چگونگی تغییرات ضریب بهره سرعت و محیط بیضی مطالعه شد که در شکل ۸-ب مشاهده می‌شود. در اینجا نیز نوعی رابطه توانی بین بهره سرعت و محیط الگو برقرار است که برای مقادیر مختلف نسبت افطار به دست آمده است. با استفاده از برازش خطی منحنی‌های فوق قابل بیان بدین صورت هستند:

$$K = K_0 \cdot P^{\beta_3}$$

$$\frac{b}{a} = 0.3 : \begin{cases} K_0=4.2 \\ \beta_3=0.284 \end{cases} \quad \frac{b}{a} = 0.35 : \begin{cases} K_0=4.41 \\ \beta_3=0.316 \end{cases} \quad (17)$$

$$\frac{b}{a} = 0.4 : \begin{cases} K_0=4.62 \\ \beta_3=0.338 \end{cases} \quad \frac{b}{a} = 0.45 : \begin{cases} K_0=4.91 \\ \beta_3=0.357 \end{cases}$$

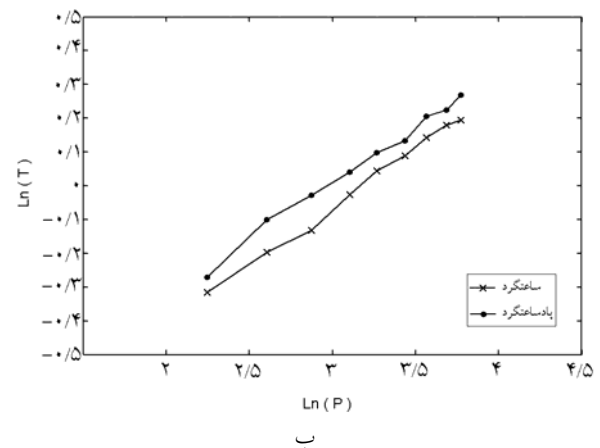
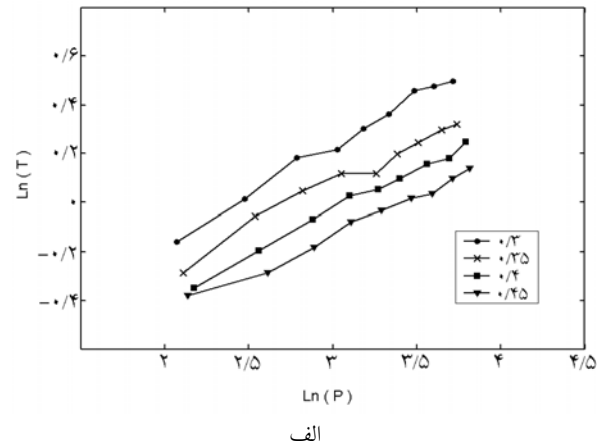
ضریب بهره سرعت K_0 به وسیله فرد انتخاب می‌شود در حالی که تأثیر اندازه الگو در سطوح پائین سیستم کنترل حرکت لحاظ می‌شود. بر پایه نتایج حاصل از روابط (۱۴)- (۱۷) می‌توان دو نتیجه زیر را به دست آورد:

$$\begin{aligned} K_0 \cdot T_0 &\approx 1.61 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &\approx 1 \end{aligned} \quad (18)$$

این نتایج حاکی از تغییرات قانونمند $\beta_3, \beta_2, \beta_1$ و K_0, T_0 در قبال یکدیگر و ثابت بودن کمیت ترکیبی آنها است.

۴-۲-۳- تحلیل آماری

تحلیل آماری نتایج در جدول ۲ تنظیم شده است. نکته قابل توجه وابستگی متغیرهای منفرد K_0 و T_0 به متغیرهای کیفی فرد، جهت و چرخش است در حالی که عبارت‌های ترکیبی $\beta_3 + \beta_2 + \beta_1$ و $K_0 \cdot T_0$ مستقل از عوامل مذکور هستند. این امر بیانگر ذاتی بودن این ویژگی‌هاست که تأییدی بر نتیجه ذکر شده در رابطه (۱۸) است.



شکل ۷- تغییرات زمان ترسیم بر حسب محیط (طول) بیضی.

الف) میانگین تغییرات به ازای نسبت‌های مختلف b/a ;

ب) تغییر به ازای $b/a = 0.4$

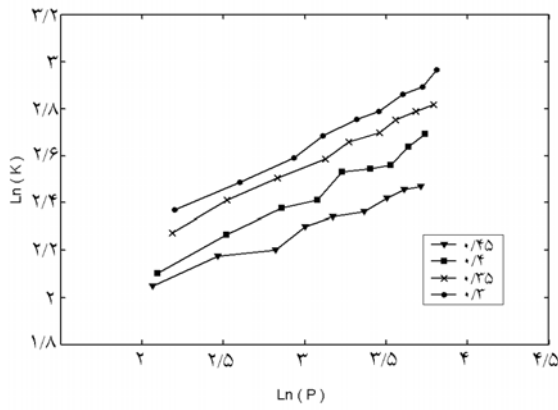
در حالت حدی $\beta_1 = 0$ اصل شیب یکسان محقق می‌شود و زمان حرکت مستقل از طول مسیر است:

$$T = T_0 \Rightarrow \frac{V1_{mean}}{V2_{mean}} = \frac{P1}{T1} / \frac{P2}{T2} = \frac{P1}{P2} \propto \frac{R1}{R2} \quad (15)$$

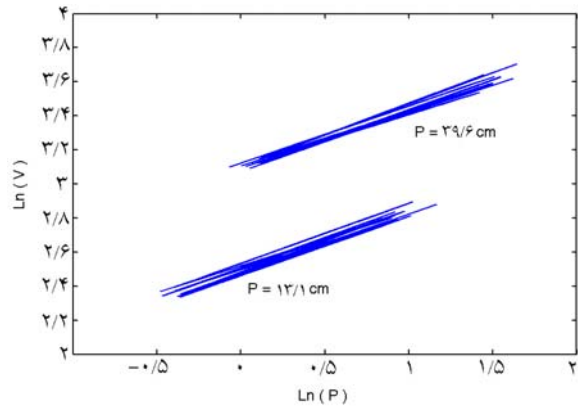
در این حالت سیستم کنترل-حرکت سعی می‌کند میانگین سرعت مماسی را در الگوهای با شعاع متفاوت به گونه‌ای پیش‌بینی کند که زمان اجرا یکسان باشد.

۳-۲-۳- قانون توان دو- سوم

قانون توان دو- سوم که از نظر تحلیلی درباره هر منحنی بیضی صادق است، در این قسمت بررسی می‌شود. شکل ۸-الف برای دو حالتی که محیط بیضی برابر ۱۳/۱ و ۳۹/۶ است، رابطه سرعت و شعاع در فضای لگاریتمی نشان می‌دهد که رابطه‌ای خطی بر آنها حاکم است (هر دو جهت چرخش). با استفاده از برازش خطی خواهیم داشت:



(ب)



(الف)

شکل ۸- تغییرات سرعت ترسیم. الف) بر حسب شعاع به ازای دو مقدار محیط بیضی؛ ب) بر حسب محیط (طول) بیضی به ازای نسبت‌های مختلف b/a

جدول ۲- تحلیل آماری متغیرهای حرکتی در آزمون اول

وابستگی به چرخش		وابستگی به جهت		وابستگی به شخص		متغیر
F(۱, ۳۰)	P	F(۳, ۶۰)	P	F(۱۵, ۲۴۰)	P	
۱۰/۲۷۴	۰/۰۰۳۲	۴/۲۷۳	۰/۰۰۸۴	۲/۷۳۱	۰/۰۰۰۶	سرعت متوسط
۹/۳۸۶	۰/۰۰۴۶	۴/۸۱۶	۰/۰۰۴۵	۲/۵۹۷	۰/۰۰۱۲	سرعت بیشینه
ندارد		ندارد		ندارد		سرعت بیشینه به میانگین
۱۲/۱۰۷	۰/۰۰۱۶	۴/۶۲۹	۰/۰۰۵۶	۲/۶۳۹	۰/۰۰۱	بهره سرعت K_0
۱۵/۵۲۶	۰/۰۰۰۴	۴/۶۸۵	۰/۰۰۵۳	۲/۷۴۰	۰/۰۰۰۶	زمان متوسط
۱۴/۷۲۳	۰/۰۰۰۶	۴/۷۷۳	۰/۰۰۴۸	۲/۴۵۱	۰/۰۰۲۴	گین زمان T_0
ندارد		ندارد		ندارد		$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$
ندارد		ندارد		ندارد		$K_0 \cdot T_0$

$$K_0 \cdot T_0 \approx 2.22 \quad (19)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \approx 1$$

که مستقل از متغیرهای آزمون یعنی فرد، جهت و دامنه هستند. این وابستگی می‌تواند در سطوح پائین سیستم کنترل حرکت (عضلات و مفاصل) تعریف شود ولی باید توجه داشت که حداقل یکی از مقادیر $K_0 \cdot T_0$ در سطوح بالایی تعیین گردد. سؤال مهم آن است که کدام یک از آنها نقش پایه و زیربنائی را در سیستم دارد؟

ساختار رابطه توانی می‌تواند نتیجه همکاری متقابل سطوح پائین عصبی عضلانی باشد که در نتیجه آن مقادیر α_1, α_2 تعیین می‌شوند و نیاز به برنامه‌ریزی CNS ندارد. این وابستگی درجه آزادی مدل را برای کنترل زمان و سرعت

۴- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله سعی شد با طراحی دو آزمون برای حرکات ترسیمی ساده و تکراری و ارائه دو مدل توانی ساده با ثابت‌های قانونمند که ویژگی‌های هندسی و حرکتی را مقید می‌سازند، نگرش جدیدی برای دو مسئله بسیار اساسی سیستم کنترل حرکت یعنی تعداد درجه‌های آزادی بالا و پیچیدگی محاسبات پیشنهاد شود.

در آزمون اول هر چند عوامل تفاوت‌های فردی، جهت و دامنه حرکت بر زمان و بیشینه سرعت حرکات ساده و مستقیم، مؤثر است ولی وابستگی هر دو متغیر با دامنه الگو تحت رابطه توانی توصیف می‌شوند. همچنین این دو رابطه مستقل از یکدیگر نبوده و تحت قیود زیر قرار دارند:

دادند. در این تحقیق شکل اولیه آن (رابطه ۲) مبناست ولی مقدار β_2 به وسیله شرط $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \approx 1$ معین می‌شود که می‌تواند حرکات متنوع‌تری را شامل شود.

همچنین وجود رابطه (۱۸) بیانگر تعامل درونی دو اصل شیب یکسان و قانون توان دو-سوم است از آنجا که:

$$T_0 = \frac{1.61}{K_0} \quad (21)$$

$$\beta_1 = 1 - \beta_2 - \beta_3$$

به بیانی دیگر ضریب بهره سرعت مماسی مقدار مقیاس میانگین سرعت (روابط ۱۵ و ۲۰) را تعیین می‌کند و از طرفی خواص هندسی مسیر (انحناء) از طریق رابطه (۱۶) و β_2 مقدار β_1 را کنترل می‌کند.

دو مدل توانی ذکر شده در حرکات ساده مستقیم و تکراری و متغیرهای متعامل، نشان دهنده آن است که وظیفه طرح‌ریزی حرکت در سطوح فوقانی CNS شاید در حد تعیین مقادیر T_0 یا K_0 باشد و جزئیات دیگر مانند دقت، سرعت لحظه‌ای، همواری و نرمی حرکت در سطوح پائین سیستم عصبی عضلانی و در تعامل آنها با عوامل محیطی و ویژگی‌های هندسی و حرکتی معین می‌شود که به معنی کاهش درجات آزادی و پیچیدگی محاسبات خواهد بود ضمن آنکه مطابق نظریه برنامه حرکتی، CNS تنها مشخصات ذاتی و اساسی نظیر زمان‌بندی نسبی حرکات را ذخیره کرده و ویژگی‌های ظاهری آن مجموعه مانند دامنه و سرعت در سطوح پائین‌تر تعیین می‌شود و این امر فضای ذخیره‌سازی کوچک‌تری را طلب می‌کند.

مراجع

- [1] Woodworth R.S., The accuracy of voluntary movement; Psychological Review, 1899; 3: 1-106.
- [2] Schmidt R.A., Motor control and learning: a behavioral emphasis; 2nd Edition; Human Kinetics; 1988.
- [3] Hogan N., An organizing principle for a class of voluntary movements; J. of Neuroscience, 1984; 4: 2745-2754.
- [4] Wann J., Nimmo-Smith J., Wing A.M., Relation between velocity and curvature in movement: Equivalence and divergence between a power law and a minimum-jerk model; J. of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 1988; 14: 622-637.

کاهش می‌دهد و سادگی محاسبات را در پی دارد. نکته دیگر آنکه هرچند در این آزمایش‌ها مقادیر تقریبی α_1, α_2 تعیین شدند ولی قید $\alpha_1 + \alpha_2 \approx 1$ بدین معناست که با تغییر مشخصات آزمون و نوع حرکت این مقادیر تغییر کند و مدل گروه وسیع‌تری از حرکات را شامل شود.

از سوی دیگر نشان داده شد که ویژگی $\frac{V_{max}}{V_{mean}}$ در هر ضربه نوشتاری مقداری ثابت و برابر $K_0.T_0$ است که با مقدار $2/186$ حاصل از مدل کمینه اسنپ در مطالعه تحلیلی ریچاردسون و فلش بسیار نزدیک است [۲۳]. البته یک تفاوت مهم بین این دو نتیجه آن است که مدل کمینه اسنپ منحنی سرعت را گوسی و متقارن پیش‌بینی می‌کند در حالی که سرعت در الگوهای مورد بررسی نامتقارن است. همچنین پیش‌بینی‌های مدل در حرکات با دامنه مشابه و زمان متغیر و نیز حرکات با دامنه متغیر و زمان مشابه با تحقیقات گذشته مطابقت دارد [۲۹، ۳۰، ۳۲].

در آزمون دوم که روی حرکات بیضوی تکراری انجام شد، نتیجه گرفته شد که میانگین سرعت مماسی خود تابعی توانی از طول الگو است:

$$\frac{P}{T} = \frac{I}{T_0} p^{1-\beta_i} \quad (20)$$

بنابراین اصل شیب یکسان برای تمام حرکات منحنی گونه و تکراری صادق نیست و در شرایط خاص یعنی $\beta_1 = 0$ برقرار است که با نتایج مراجع [۱۲، ۳۴] مشابه است. در بررسی قانون توان دو-سوم نتایج ذکر شده در رابطه (۱۸) حاصل شد و با استفاده از تحلیل آماری نشان داده شد هرچند β_i و T_0, K_0 وابسته به متغیرهای کیفی فرد، جهت و چرخش هستند ولی ترکیب آنها مستقل از آن متغیرها است. تحقق شرط $K_0.T_0 = 1/61$ نیازمند تعیین یکی از آنها به وسیله مراکز فوقانی سیستم کنترل حرکت است در حالی که تعامل در سطوح پائین و تأثیر خواص هندسی مانند طول و انحنای الگوی ترسیمی عامل تعیین کننده مقادیر β_i است. بنابراین هر چند رابطه توانی میان سرعت مماسی و انحناء برقرار است ولی تنها در شرایط $\beta_2 = 0/33$ قانون توان دو-سوم صادق است. محققان پیشین برای جبران این مسئله و تطابق آن بر گروه وسیع‌تری از حرکات، رابطه (۳) را پیشنهاد

- [21] Dounskaia N., Kinematic invariant during cyclical arm movements; *Biological Cybernetics*, 2007; 96: 147-163.
- [22] Viviani P., Flash T. Minimum-jerk model, two-thirds power law and isochrony: converging approaches to the study of movement planning; *J. Exp. Psychology*, 1995; 21: 32-53.
- [23] Richardson M.J.E., Flash T., Comparing smooth arm movements with Two-Thirds power law and the related segmented-control hypothesis; *J. Neuroscience*, 2002; 22: 8201-8211.
- [24] Teuling H.L., Maarse F.J., Digital recording and processing of handwriting movements; *Human Movement Science*, 1984; 3: 193-217.
- [۲۵] رشیدی سعید، هاشمی گلپایگانی محمدرضا، فلاح علی، توحیدخواه فرزاد؛ رابطه میان خواص هندسی و ویژگی‌های حرکتی الگوهای ترسیمی مهارتی؛ دوازدهمین کنفرانس مهندسی پزشکی ایران؛ ۱۳۸۴: ۳۷۹-۳۸۶.
- [26] Schmidt R.A., *Motor learning and Performance*; Champaign Illinois: Human Kinetics Books; 1991.
- [27] Plamondon R., Alimi A.M., Yergeau P., Leclerc F., Modeling velocity profiles of rapid movements: a comparative study; *Biological Cybernetics*, 1993; 69: 119-128.
- [28] Milner J.T., Controlling velocity in rapid movements; *J. Motor Behavior*, 1986; 18: 147-161.
- [29] Plamondon R., A kinematic theory of rapid human movements: 1. Movement representation and generation; *Biological Cybernetics*, 1995; 72: 295-307
- [30] Nagasaki H., Asymmetric velocity profiles and acceleration profiles of human arm movements; *Exp. Brain Research*, 1989; 74: 319-326.
- [31] Plamondon R., A kinematic theory of rapid human movements: 2. Movement time and control; *Biological Cybernetics*, 1995; 72: 309-320.
- [32] Gielen C.C.A.M., Oosten K., Pull ter Gunne F., Relation between EMG activation patterns and kinematic properties of aimed arm movements; *J. Motor ehavior*, 1985; 17: 421-442.
- [33] Plamondon R., Alimi A.M., Speed/accuracy trade-offs in target-directed movements; *Behavioral and Brain Sciences*, 1997; 20: 279-349.
- [34] Plamondon R., Guerfali W., The 2/3 power law: when and why? *Acta Psychologica*, 1998; 100: 85-96.
- [5] Richardson M.J. Flash T., Comparing smooth arm movements with the two-thirds power law and the related segmented-control hypothesis, *J. of Neuroscience*, 2002; 22 (18): 8201-8211.
- [6] Nelson W.L., Physical principles for economies of skilled movements; *Biological Cybernetics*, 1983; 46: 135-147.
- [7] Flash T., Hogan N., The coordination of arm movements: An experimentally confirmed mathematical model. *J. of Neuroscience*, 1985; 5: 1688-1703.
- [8] Uno Y., Kawato M., Suzuki R., Formation and control of optimal trajectory in human multijoint arm movement; *Biological Cybernetics*; 1989; 61: 89-101.
- [9] Harris C.M., Wolpert D.M., Signal-dependent noise determines motor planning; *Nature*; 1998; 394: 780-784.
- [10] Lebedev S., Tsui WH., Van Gelder P., Drawing movements as an outcome of the principle of least action; *J. Mathematical Psychology*, 2001; 45: 43-52.
- [11] Soechting J.F. Terzuolo C., An algorithm for the generation of curvilinear wrist motion in an arbitrary plane in three-dimensional space; *Neuroscience*, 1986; 19: 1393-1405.
- [12] Lacquaniti F., Terzuolo C.A., Viviani P., The law relating kinematics and figural aspects of drawing movements; *Acta Psychologica*, 1983; 54: 115-130.
- [13] Georgopoulos A.P., Kalaska J.F., Massey J.T., Spacial trajectories and reaction times of aimed movements: effects of practice, uncertainty, and change in target location; *J. Neurophysiology*, 1981; 46: 725-743.
- [14] Soechting J.F., Lacquaniti F., Invariant characteristics of a pointing movement in man; *J. Neuroscience*, 1981; 1: 710-720.
- [15] Morasso P., Spacial control of arm movements; *Exp. Brain Research*, 1981; 42: 223-227.
- [16] Viviani P., Terzuolo C., Trajectory determines movement dynamics; *Neuroscience*, 1982; 7: 431-437.
- [17] Viviani P., Stucchi N., Biological movements look constant: evidence of motor perceptual interactions; *J. Exp. Psychology*, 1992; 18: 603-623.
- [18] Viviani P., Mounoud P., Perceptuo-motor compatibility in pursuit tracking of two-dimensional movements; *J. of Motor Behavior*, 1990; 22: 407-443.
- [19] Gribble P.L., Ostry D.J., Origins of the power law relation between movement velocity and curvature: modeling the effects of muscle mechanics and limb dynamics; *J. Neurophysiology*, 1996; 76: 2853-2860.
- [20] Schaal S., Sternad D., Origins and violations of the 2/3 power law in rhythmic three-dimensional arm movements; *Exp. Brain Research*, 2001; 136: 60-72.