DOI: 10.22041/ijbme.2009.13409

Generalized Time-Domain Solution to the KZK Nonlinear Acoustic Wave Equation

M. Hajihasai[1], Y. Farjami[2], B. Vosoughi-Vahdat[3*], J. Tavakkoli[4]

[1] M.Sc Graduated, School of Electrical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran, mhajihasani@gmail.com
[2] Assistant Professor, School of Computer Engineering, University of Qom, Qom, Iran, farjami@ut.ac.ir
[3] Assistance Professor, School of Electrical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran
[4] Assistant Professor, School of Physics, Ryerson University, Toronto, Ontario, Canada, jtavakkoli@ryerson.ca

Abstract

Increasing number of diagnostic and therapeutic applications of finite amplitude ultrasound in medicine and biology has motivated researchers toward more accurate modeling and more efficient simulation of nonlinear ultrasound regime. One of the most widely used nonlinear models for propagation of 3D diffractive sound beams in dissipative media is the KZK (Khokhlov, Kuznetsov, Zabolotskaya) parabolic nonlinear wave equation. Various numerical algorithms have been developed to solve the KZK equation. Generally, these algorithms fall into one of the three main categories: frequency domain, time domain and combined time-frequency domain. The intrinsic parabolic approximation in the KZK equation imposes limiting accuracy in the solution to the diffraction term of the KZK equation particularly for field points close to the source or in far off-axis region. In this work we developed a novel generalized time domain numerical algorithm to solve the diffraction term of the KZK equation. The algorithm solves the Laplacian operator of the KZK equation in the 3D Cartesian coordinates using novel 5-point Implicit Backward Finite Difference (IBFD) and 5-point Crank-Nicolson Finite Difference (CNFD) techniques. This leads to a more uniform discretization of the Laplacian operator which in turn results in a more accurate solution to the diffraction term in the KZK equation. Comparison between results obtained with the new algorithm and the previously-published data for rectangular ultrasound sources is presented.

Keywords: **Nonlinear acoustic, KZK wave equation, Diffraction, Finite Difference method, Sparse solver.**

* **Corresponding author**
Address: *Bijhan Vosoughi-Vahdat, School of Electrical Engineering, Sharif University of Technology, Azadi St, Tehran, Iran*
Tel: *+98 912 3974371, +98 21 66165933*
Fax: *+98 21 66005816*
E-mail: *vahdat@sharif.edu*

DOI: 10.22041/ijbme.2009.13409

حل عددي تعميم‌يافته معادله موج غيرخطي KZK در حوزه زمان

مجتبي حاجي حسني[۱]، يعقوب فرجامي[۲]، بيژن وثوقي وحدت[۳*]، جهانگير توكلي[۴]

[۱] كارشناس ارشد، گروه بيوالكتريك، دانشكده مهندسي برق، دانشگاه صنعتي شريف، تهران mhajihasani@gmail.com

[۲] استاديار، گروه مهندسي كامپيوتر، دانشگاه قم، قم farjami@ut.ac.ir

[۳] استاديار، گروه بيوالكتريك، دانشكده مهندسي برق، دانشگاه صنعتي شريف، تهران

[۴] استاديار، دانشكده فيزيك، دانشگاه رايرسون، تورنتو، كانادا jtavakkoli@ryerson.ca

چكيده

افزايش روز افزون كاربردهاي تشخيصي و درماني اولتراسوند غيرخطي در زمينه پزشكي و بيولوژي سبب ترغيب پژوهشگران در دستيابي به مدلسازي دقيق و شبيه‌سازي كارامد از رژيم اولتراسوند غيرخطي شده است. در بين مدل‌هاي غيرخطي براي مدلسازي انتشار پرتوي اولتراسوند داراي پراش در سيال غير ايدئال با تلفات، معادله موج غيرخطي KZK بيشترين توجه و استقبال را پيدا كرده است. چند الگوريتم عددي براي حل معادله KZK تدوين شده است. در كل، تمامي اين الگوريتم‌ها به سه دسته قابل تقسيم هستند: حوزه فركانس، حوزه زمان و تركيب حوزه زمان- فركانس. وجود تقريب پارابوليک در ذات معادله KZK به محدوديت صحت بازه حل جمله پراش، به‌ويژه در نزديكي منبع و ناحيه دور از محور انتشار منجر مي‌شود. در اين مقاله، تعميمي جديد براي حل عددي جمله پراش معادله KZK در حوزه زمان ارائه مي‌شود. اين الگوريتم، عملگر لاپلاسين را با بهره‌گيري از روش‌هاي ۵-نقطه بازگشتي ضمني تفاضل محدود (IBFD ۵-نقطه) و ۵-نقطه كرانک-نيكلسون تفاضل محدود (CNFD ۵-نقطه) محاسبه مي‌كند. اين امر امكان گسسته‌سازي كم‌حجم‌تر را براي عملگر لاپلاسين فراهم مي‌كند، بدون اينكه از دقت جواب عددي كاسته شود. مقايسه نتايج الگوريتم پيشنهادي با الگوريتم منتشر شده براي منبع صوت متقارن دايروي، نشان‌دهنده دقت محاسباتي و كارايي عددي اين روش است. به دنبال آن، نتايج انتشار موج اولتراسوند غيرخطي با منبع مربعي براي نشان دادن توانمندي روش ارائه شده است.

كليدواژگان: اولتراسوند غيرخطي، معادله موج KZK، پراش، تفاضل محدود، ماتريس‌هاي تنک.

* عهده‌دار مكاتبات

نشاني: تهران، خيابان آزادي، دانشگاه صنعتي شريف، دانشكده مهندسي برق، گروه مهندسي پزشكي

تلفن: ۰۹۱۲۳۹۷۴۳۷۱، ۶۶۱۶۵۹۳۳، **دورنگار:** ۶۶۰۰۵۸۱۶، **پيام نگار:** vahdat@sharif.edu

۱- مقدمه

در چند دهه اخير، کاربرد اولتراسوند شدت بالا[1] در تشخيص و درمان نوين پزشکي، صنعت و بيولوژي رشد چشمگيري داشته است. مدلسازي اولتراسوند غيرخطي براي تحليل و شبيه‌سازي دقيق آن در کاربردهاي مختلفي حائز اهميت است.

در کاربرد تشخيص پزشکي اولتراسوند، تصويربرداري هارمونيک بافت[2] (THI) [۱] و يا تصويربرداري کنتراست هارمونيک[3] (CHI) [۲] بر اساس خاصيت توليد هارمونيک حين انتشار موج اولتراسوند غيرخطي و يا نوسانات غيرخطي حباب‌هاي در ابعاد ميکرو، به عنوان روش‌هاي جديد تصويربرداري مطرح شده‌اند. تصاوير حاصل از اين روش‌ها، کنتراست و قدرت تفکيک بالاتر و اغتشاشات پائين‌تري به همراه دارند. در کاربرد درماني توان بالاي اولتراسوند، سه مثال برجسته سنگ شکن[4]، هيستوتريپسي[5] و جراحي اولتراسوند شدت بالاي متمرکز[6] (HIFU) قابل ذکر است. براي درمان سنگ کليه و کيسه صفرا از خاصيت موج ضربه‌اي[7] استفاده مي‌شود. ضربه، تغيير ناگهاني در فشار اطراف سنگ ايجاد مي‌کند، به طوري که از فشار منفي منجر به حباب‌هاي ريز، ناگهان به فشار خيلي مثبت افزايش مي‌يابد و همانند يک چکش قوي به سنگ نيرو وارد مي‌کند و سبب تخريب آن مي‌شود [۳، ۴]. در هيستوتريپسي، پالس کوتاه در حد ميکرو ثانيه با فشار اولتراسوند بالا (حدود چند ده تا چند صد مگاپاسکال) در ناحيه بافت تحت درمان متمرکز مي‌شود تا در اثر فشار مکانيکي، تابش فشار و ايجاد حفره سلول‌ها و بافت نرم را تخريب کند [۵، ۶].

در جراحي HIFU، تحريک شدت بالا و متمرکز (حدود چند ميلي ثانيه تا چند ثانيه)، به علت تبديل انرژي اولتراسوند به گرما از طريق جذب بافت، باعث افزايش سريع دما به بيش از $65^{\circ}C$ مي‌شود. اين افزايش سريع سبب تخريب و نکروز سلول‌ها در ناحيه کانوني مي‌شود [۷]. از جمله کاربردهاي آينده جراحي HIFU، مي‌توان به انکولوژي، جلوگيري از خونريزي، چشم پزشکي، جراحي مغز و اعصاب و جراحي زيبايي اشاره کرد [۷-۱۲].

در تمامي کاربردهاي درماني ذکر شده، پرتو اولتراسوند داراي دامنه‌اي فراتر از اولتراسوند خطي است که تئوري خطي صوت قادر به پيش‌بيني دقيق آنها نيست، بنابراين نياز به مدل‌هاي رياضي دقيق براي اولتراسوند غيرخطي و پياده‌سازي عددي کارامد آنها احساس مي‌شود. اصلي‌ترين انگيزه مدلسازي و شبيه‌سازي انتشار پرتو فراصوت غيرخطي در اين مقاله، طراحي سيستم جديد HIFU و هيستوتريپسي و يا بهينه‌سازي يکي از سيستم‌هاي نوين موجود در پزشکي و بيولوژيست. علاوه بر آن، مدل‌هاي اولتراسوند غيرخطي دقيق و کارا در درک رفتار و اثر متقابل پيچيده امواج متمرکز شدت بالا بر بافت و اثرات جانبي آن کمک شايان توجهي خواهد کرد.

در جستجوي مدلي براي انتشار موج اولتراسوند غيرخطي در محيط سيال ترموويسکوز[8] و يا بافت نرم از يک منبع صوتي با اندازه محدود، بايد سه اثر پراش[9]، جذب[10] و انتشار غيرخطي در نظر گرفته شوند. از ميان مدل‌هاي غيرخطي براي مدلسازي انتشار پرتوي فراصوت داراي پراش در سيال غير ايدئال با تلفات، از معادله موج غيرخطي KZK[11] بيشترين توجه و استقبال صورت گرفته است [۱۳]. اگر چه معادله KZK براي انتشار موج اولتراسوند غيرخطي در سيال‌هاي ترموويسکوز به دست آمده است، چند معادله از روي آن براي محيط‌هاي مختلف شامل بافت بدن تعميم يافته است [۱۴]. باخلوف[12] و همکاران [۱۵]، الگوريتم عددي ترکيبي براي منبع متقارن دايروي و موج متناوب طراحي کردند. در اين الگوريتم جمله پراش و جذب در حوزه فرکانس و جمله غيرخطي در حوزه زمان با روش گادونوف[13] که يک روش سنتي براي حل معادلات ديفرانسيل جزئي است، محاسبه مي‌شود [۱۶].

در سال ۱۹۸۴ آنونسن[14] و همکاران [۱۷]، الگوريتم حوزه فرکانس براي حل معادله KZK معرفي کردند که به طور گسترده‌اي براي شکل موج متناوب و شبه متناوب و منبع

[1] High Intensity
[2] Tissue Harmonic Imaging
[3] Contrast Harmonic Imaging
[4] Lithotripsy
[5] Histotripsy
[6] High Intensity Focused Ultrasound
[7] Shock Wave Formation
[8] Thermoviscous
[9] Diffraction
[10] Absorption
[11] Khokhlov, Kuznetsov, Zabolotskaya
[12] Bakhvalov
[13] Godunov
[14] Aanonsen

متقارن دايروي به‌کار مي‌رود. ايشان با قرار دادن بسط فوريه در معادله KZK، دو دسته دستگاه معادلات ديفرانسيل جزئي وابسته به هم به‌دست آوردند که با روش تفاضل محدود معمولي آنها را حل کردند. بيکر[۱۵] و همکاران [۱۸]، الگوريتم حوزه فرکانس (برگن کد[۱۶]) را براي منبع نامتقارن تعميم دادند و نتايج را براي منبع تخت مستطيلي و با تحريک پالس و موج متناوب منتشر کردند.

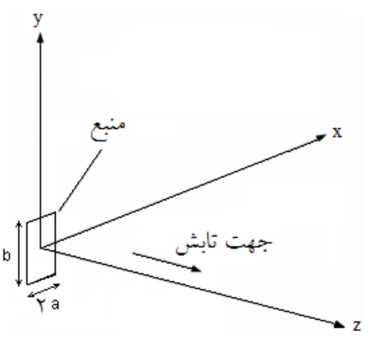
الگوريتم حوزه زمان توسط لي و هميلتون[۱۷] به طور مستقيم با تفاضل محدود حل مي‌شود [۱۹]. اين الگوريتم با استفاده از عملگر جداساز[۱۸]، معادله KZK را جمله به جمله در جهت انتشار موج حل و پيشروي مي‌کند. لي معادله را براي شکل موج پالس و منبع دايروي متقارن در حالت متمرکز و تخت محاسبه کرد [۲۰]. براي اين کار، جمله پراش را در مختصات قطبي با روش بازگشتي ضمني تفاضل محدود[۱۹] (IBFD) [۲۱] در نواحي نزديک[۲۰] و روش کرانک-نيکلسون تفاضل محدود[۲۱] (CNFD) [۲۱] در نواحي دور[۲۲] تقريب زدند. در هر مرحله، به دنبال هر بار محاسبه پراش، اثر جمله جذب به صورت کلاسيک که در واقع اثر جذب مرتبه دوم ترموويسکوز است، اضافه مي‌شود [۲۲]. سپس اثر جمله غيرخطي محاسبه مي‌شود. سال ۱۹۹۶، کلولند[۲۳] و هميلتون در نسخه جديد الگوريتم لي فرايند تعويق[۲۴] را اضافه کردند [۱۴] تا توانمندي مدل کردن اثر جذب را در بافت حياتي بدن پيدا کند. در پي تلاش در دستيابي به مدلي غير از KZK، در سال ۱۹۹۱، کريستوفر و پارکر[۲۵] يک مدل عددي براي شبيه‌سازي انتشار پرتو فراصوت غيرخطي داراي پراش در محيط با تلفات ارائه دادند [۲۳]. اين مدل به مدل پديده‌شناخت[۲۶] موسوم است که تنها تقريب موجود در روش به عملگر جداساز برمي‌گردد. در تعميم و توسعه اين مدل، در سال ۱۹۹۸، توکلي و همکاران با هجوم به نقطه ضعف مدل پديده‌شناخت، الگوريتم مرتبه دوم عملگر جداساز را به منظور بهبود دقت و کارايي مدل پيشنهاد کردند [۲۴، ۲۵]. همچنين به منظور افزايش دقت محاسبات در جمله پراش، از حل کامل پراش با استفاده از انتگرال ريلي سود بردند. توکلي و همکاران در مطالعه ديگري مقايسه‌اي از نتايج مدل پديده‌شناخت مجهز به عملگر جداساز مرتبه دوم با معادله موج غيرخطي KZK و عملکردشان در مدلسازي امواج شوک منتشر کردند [۲۶].

در سال ۲۰۰۵، يانگ[۲۷] و همکاران براي تعميم کد تگزاس[۲۸] براي شکل منبع نامتقارن، جمله پراش را در مختصات کارتزين در نظر گرفتند [۲۷]. ايشان جمله پراش را به طور مجزا در محور x و در محور y محاسبه کردند. در نواحي نزديک، از IBFD براي دو قسمت پراش و در نواحي دور، از روش چرخش جهت ضمني[۲۹] (ADI) [۲۱] که جمله پراش به دو نيم مرحله[۳۰] تقسيم مي‌شود، استفاده کردند.

در مقاله حاضر، راه حل جديدي براي جمله پراش معادله KZK ارائه مي‌شود [۲۸]. تعميم ديگري از کد تگزاس معرفي خواهد شد. در اين روش جمله پراش بدون جداسازي و به شکل همزمان در دو محور x و y حل مي‌شود. همچنين در نواحي نزديک و دور به ترتيب از روش‌هاي ۵-نقطه IBFD و ۵-نقطه CNFD [۹] استفاده مي‌شود. الگوريتم پيشنهادي مناسب و همخوان حل‌هاي عددي و تحليلي موجود جمله پراش معادله KZK است. با ترکيب اين الگوريتم با جملات جذب و غيرخطي که در دسترس‌اند، مي‌توان به حل کامل معادله KZK دست يافت.

۲- روش

شکل ۱ هندسه کلي و مختصات سيستمي را که در اين مقاله استفاده شده است، نشان مي‌دهد.



شکل ۱- هندسه و مختصات سيستم

[15] Baker
[16] Bergen code
[17] Lee and Hamilton
[18] Operator splitting
[19] **I**mplicit **B**ackward **F**inite **D**ifference
[20] Near Field
[21] **C**rank-**N**icolson **F**inite **D**ifference
[22] Far Field
[23] Cleveland
[24] Relaxation
[25] Christopher and Parker
[26] Phenomenological
[27] Yang
[28] Texas code
[29] **A**lternate-**D**irection **I**mplicit
[30] Half-step

معادله KZK بر حسب متغير فشار آكوستيك[۳۱] در معادله (۱) آمده است:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t'} = \frac{c_0}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) + \frac{D}{2c_0^3}\frac{\partial^3 p}{\partial t'^3} + \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 p^2}{\partial t'^2} \qquad (۱)$$

كه در آن $t' = t - z/c_0$ زمان معوقه[۳۲]، t زمان، c_0 سرعت سيگنال كوچك صوت، x و y فاصله عرضي نسبت به محور انتشار (محور z) در جهت محورهاي x و y و ρ_0 چگالي حالت تعادل محيط است. همچنين $D = \rho_0^{-1}\left[\left(\varsigma + 4\eta/3\right) + \kappa\left(1/c_\upsilon - 1/c_p\right)\right]$ ضريب ديفيوژن صوت[۳۳] در محيط ترموويسكوز، جائيكه ς چسبندگي حجمي[۳۴]، η چسبندگي عرضي[۳۵]، κ هدايت گرمايي و c_υ و c_p به ترتيب، گرماي ويژه در حجم و فشار ثابت هستند. ضريب غيرخطي نيز $\beta = 1 + B/2A$ تعريف مي‌شود، كه در آن B/A پارامتر غيرخطي محيط است.

اعمال تبديل مختصات روي معادله KZK، براي محاسبه پرتوي صوت، تحت تأثير پديده پراش در نواحي دور سودمند خواهد بود. با تغيير متغيرهاي زير براي پرتوي صوت غير متمركز شروع مي‌كنيم:

$$\sigma = \frac{z}{z_0} \qquad (۲)$$

$$X = \frac{x/a}{1+\sigma} \qquad (۳)$$

$$Y = \frac{y/b}{1+\sigma} \qquad (۴)$$

$$\tau = \omega_0 t' - \frac{(x/a)^2}{1+\sigma} - \frac{(y/a)^2}{1+\sigma} \qquad (۵)$$

$$P = (1+\sigma)\frac{p}{p_0} \qquad (۶)$$

a, b مشخصه‌هاي اندازه منبع در جهت x و y هستند، $\sigma = \frac{z}{z_0}$ بي‌بعد سازي محور z نسبت به فاصله ريلي[۳۶] اصلاح يافته $z_0 = \frac{\omega_0 ab}{2c_0}$ در مشخصه فركانس زاويه‌اي ω_0، X و Y بي‌بعد شده مختصات عرضي، τ بي‌بعد شده زمان معوقه و p_o بيشينه دامنه فشار منبع است.

تبديل مختصاتي براي پرتوي صوت متمركز با اندكي تفاوت نسبت به معادلات (۲)-(۶) در مرجع [۲۰] قابل دسترسي است. اين تفاوت باعث اختلافات اندكي در معادله حاصل مي‌شود ولي در كليت روش كه در ادامه مي‌آيد، تأثيري ندارد.

با جاگذاري معادلات (۲)-(۶) در معادله (۱) و انتگرال‌گيري نسبت به متغير □ از طرفين تساوي، معادله KZK تبديل يافته به دست مي‌آيد (معادله ۷):

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{1}{4(1+\sigma)^2}\int_{-\infty}^{\tau}\nabla_\perp P d\tau' + A\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + \frac{N}{1+\sigma}\left(P\frac{\partial P}{\partial \tau}\right) \qquad (۷)$$

كه در آن $A = \alpha_0 z_0$ پارامتر جذب، α_0 ضريب تضعيف[۳۷]، $N = \frac{z}{\bar{z}}$ پارامتر غيرخطي و $\bar{z} = \rho_0 c_0^3 / \beta\omega_0 p_0$ فاصله فرم ضربه‌اي[۳۸] در موج تخت[۳۹] هستند. $\nabla_\perp P = \left(\frac{b}{a}\frac{\partial^2 p}{\partial X^2} + \frac{a}{b}\frac{\partial^2 p}{\partial Y^2}\right)$ لاپلاسين عرضي[۴۰] در مختصات كارتزين است.

در حالت كلي شرط مرزي منبع را به‌صورت z =۰، $p = p_0 f(t) g(x,y),$ بيان مي‌كنند، كه $f(t)$ تابع تحريك زماني منبع و $g(x,y)$ تابع مكاني دهانه منبع است. با اعمال تغيير متغيرهاي معادلات (۲)-(۶) روي شرط مرزي منبع خواهيم داشت:

$$\sigma = P = f(\tau + X^2 + Y^2) g(X,Y), \quad ۰ \qquad (۸)$$

براي دو شكل منبع مستطيلي (مطابق شكل ۱) و دايروي، به ترتيب توابع منبع به صورت معادلات (۹) و (۱۰) تغيير مي‌يابند:

$$g(X,Y) = \begin{cases} 1 & |X|,|Y| \le 1 \\ 0 & Otherwise. \end{cases} \qquad (۹)$$

$$g(X,Y) = \begin{cases} 1 & X^2 + Y^2 \le 1 \\ 0 & Otherwise. \end{cases} \qquad (۱۰)$$

در پياده‌سازي الگوريتم عددي، به دانستن محدوده مختصه زمان و مختصات عرضي X و Y نياز است؛ $-X_{max} \le X \le X_{max}$، $-Y_{max} \le Y \le Y_{max}$ و $\tau_{min} \le \tau \le \tau_{max}$ كه در واقع در نقاط انتهايي، اين اطمينان وجود دارد كه مقدار فشار P برابر صفر است. اين شرايط باعث ايجاد شرايط مرزي مصنوعي معادلات (۱۱)-(۱۶) مي‌شود:

$$P(\sigma, \tau_{min}, X, Y) = ۰ \qquad (۱۱)$$

$$P(\sigma, \tau_{max}, X, Y) = ۰ \qquad (۱۲)$$

$$P(\sigma, \tau, X_{max}, Y) = ۰ \qquad (۱۳)$$

$$P(\sigma, \tau, -X_{max}, Y) = ۰ \qquad (۱۴)$$

$$P(\sigma, \tau, X, Y_{max}) = ۰ \qquad (۱۵)$$

$$P(\sigma, \tau, X, -Y_{max}) = ۰ \qquad (۱۶)$$

[31] Acoustic pressure
[32] Retarded time
[33] Sound diffusivity of thermoviscous medium
[34] Shear viscosity
[35] Rayleigh distance
[36] Attenuation Coefficient
[37] Shock formation
[38] Plane wave
[40] Transverse Laplacian

انتخاب مقادير مرزي نيازمند دقت زياديست زيرا $X_{\max}$ و $Y_{\max}$ بايد به اندازه کافي بزرگ انتخاب شوند تا بازتاب غير قابل اجتناب ناشي از شرايط مرزي مصنوعي، معادلات (۱۳)-(۱۶)، خطاي محسوسي در ناحيه مورد نظر شبيه‌سازي ايجاد نکنند. همچنين اندازه پنجره زماني بايد به قدر کافي بزرگ باشد تا کل شکل موج، از جمله تأخير موج لبه، در نواحي نزديک و اثر جذب در نواحي دور را در حين محاسبات در برگيرد.

براي کاهش پيچيدگي در محاسبات عددي از عملگر جداساز استفاده مي‌شود [۲۰]. با اعمال عملگر جداساز (مطابق شکل ۲) معادله KZK به عنوان يک معادله پيشرو باز نويسي مي‌گردد:

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma}=L_D(P)+L_A(P)+L_N(P^2) \qquad (۱۷)$$

که در آن عملگرهاي پراش، جذب و غيرخطي مطابق معادلات (۱۸)-(۲۰) تعريف مي‌شوند:

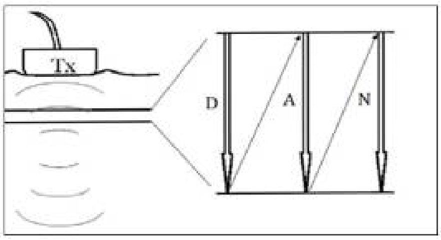
$$L_D(P)=\frac{1}{4(1+\sigma)^2}\int_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{b}{a}\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}+\frac{a}{b}\frac{\partial^2 p}{\partial Y^2}\right)d\tau' \qquad (۱۸)$$

$$L_A(P)=A\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} \qquad (۱۹)$$

$$L_N(P^2)=\frac{N}{2(1+\sigma)}\frac{\partial P^2}{\partial \tau} \qquad (۲۰)$$

به علت در دسترس بودن محاسبه عددي جمله‌هاي جذب و غيرخطي، معادلات (۱۹) و (۲۰)، (به عنوان مثال مرجع [۲۰])، در اين جا تنها به جمله پراش، معادله (۱۸)، پرداخته مي‌شود.

براي اين منظور، در جمله پراش لاپلاسين عرضي، $\nabla_\perp P$ ، و انتگرال با تفاضل محدود گسسته مي‌شوند. اين گسسته‌سازي در دو ناحيه نزديک و دور به ترتيب با ۵-نقطه IBFD و ۵-نقطه CNFD صورت مي‌پذيرد.



شکل ۲- الگوريتم عملگر جداساز

Tx: مبدل اولتراسوند، D: پراش، A: جذب و N: غيرخطي

تغيير ناگهاني و ناپيوستگي در شرط منبع، معادله (۹) و (۱۰)، سبب ايجاد ناپايداري و نوسان محاسباتي (پديده گيبس[۴۱]) در نزديکي منبع مي‌شود. براي فرار از اين مشکل، نمونه‌برداري بيشتر در نزديکي منبع (که فشار، تغييرات سريع دارد)، راه حل مناسبي است. به همين علت، در ناحيه نزديک با استفاده از روش ۵-نقطه IBFD که داراي خطاي برش از مرتبه اول روي Δσ است، پديده گيبس را به حداقل مي‌رساند. تقريب ۵-نقطه IBFD حدود ۱۰۰ مرحله (تا σ ≈۰/۱) تکرار مي‌شود، بعد از گذر از منطقه نوسان و در ناحيه دور (۰/۰۱>σ)، روش ۵-نقطه CNFD با تقريب از مرتبه دوم $(\Delta\sigma)^2$ به‌کار گرفته مي‌شود. روش CNFD اجازه مي‌دهد که فاصله‌هاي بزرگ‌تري براي هر مرحله انتخاب شوند. اين ترکيب تطبيقي، به الگوريتمي با دقت و کارايي بالا منجر مي‌شود.

۱-۲- روش ۵-نقطه بازگشتي ضمني تفاضل محدود (۵-نقطه IBFD) [۲۸]

مشتق‌هاي معادله (۱۸) را با روش ۵-نقطه IBFD تقريب مي‌زنيم:

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma}\rightarrow\frac{1}{(\Delta\sigma)_k}\left(P^{k+1}_{i,j,l}-P^{k}_{i,j,l}\right) \qquad (۲۱)$$

$$\left(\frac{b}{a}\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}+\frac{a}{b}\frac{\partial^2 p}{\partial Y^2}\right)\rightarrow$$

$$\frac{1}{(\Delta X)^2}\left(\begin{array}{l}\frac{b}{a}P^{k+1}_{i,j+1,l}+\frac{a}{b}P^{k+1}_{i,j,l+1}\\ -2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)P^{k+1}_{i,j,l}+\frac{a}{b}P^{k+1}_{i,j,l-1}+\frac{b}{a}P^{k+1}_{i,j-1,l}\end{array}\right) \qquad (۲۲)$$

فرض ΔX=ΔY، مناسب و ساده کننده است. با در نظر گرفتن حد پايين انتگرال معادله (۱۹) مطابق شرط (۱۱) و قاعده ذوزنقه‌اي تقريب زير به دست مي‌آيد:

$$\int_{\tau_{\min}}^{\tau}f(\tau')d\tau'\rightarrow(\Delta\tau)\left[\sum_{m=1}^{i-1}f_m+\frac{1}{2}(f_0+f_i)\right] \qquad (۲۳)$$

خطاي برش[۴۲] از مرتبه $(\Delta\tau)^2$ است. با جاگذاري معادله‌هاي (۲۱)-(۲۳) در جمله پراش معادله پيشرو (۱۷) و تأثير شرايط مرزي (۱۱)-(۱۶)، دسته معادلات خطي زير به‌دست خواهد آمد:

---

[41] Gibbs phenomenon

[42] Truncation Error

$$1\le j\le (j_{\max}-1),\ 1\le l\le (l_{\max}-1)$$

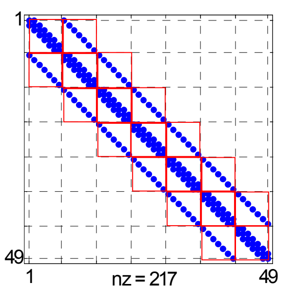
$$-\frac{R}{8}\frac{b}{a}P^{k+1}_{i,j+1,l}-\frac{R}{8}\frac{a}{b}P^{k+1}_{i,j,l+1}+\left(1+\frac{R}{4}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\right)P^{k+1}_{i,j,l}$$
$$-\frac{R}{8}\frac{a}{b}P^{k+1}_{i,j,l-1}-\frac{R}{8}\frac{b}{a}P^{k+1}_{i,j-1,l}=$$
$$\frac{R}{4}\frac{b}{a}\sum_{m=1}^{i-1}P^{k+1}_{i,j+1,l}+\frac{R}{4}\frac{a}{b}\sum_{m=1}^{i-1}P^{k+1}_{i,j,l+1}-\frac{R}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\sum_{m=1}^{i-1}P^{k+1}_{i,j,l} \qquad (۲۴)$$
$$+\frac{R}{4}\frac{a}{b}\sum_{m=1}^{i-1}P^{k+1}_{i,j,l-1}+\frac{R}{4}\frac{b}{a}\sum_{m=1}^{i-1}P^{k+1}_{i,j-1,l}+P^{k}_{i,j,l}$$
$$R=\frac{\Delta\tau(\Delta\sigma)_k}{(1+\sigma_{k+1})^2(\Delta X)^2}.$$

خطاي برش ناشي از تقريب معادله (۱۸) از مرتبه $\left[\Delta\sigma+(\Delta\tau)^2+(\Delta X)^2+(\Delta Y)^2\right]$ است [۲۰، ۲۱]. تمام جملات P در سمت چپ معادله‌هاي (۲۴) مجهول هستند (جمله‌هايي که انديس $k+1$ ، i دارند) و تمام جملات سمت راست معلوم هستند. مجهول‌هاي دستگاه معادله را به صورت زير مرتب مي‌کنيم:

$$\underline{X}_i^{k+1}=\left[P^{k+1}_{i,1,1},P^{k+1}_{i,1,2},\ldots,P^{k+1}_{i,1,l_{\max}-1},P^{k+1}_{i,2,1},\ldots,P^{k+1}_{i,j_{\max}-1,l_{\max}-1}\right]^T \qquad (۲۵)$$

با اين مرتب‌سازي، يک سيستم سه قطري بلوکي[۴۳] متقارن مطابق شکل ۳ خواهيم داشت. براي پيشروي ميدان فشار در جهت σ به اندازه Δσ، بايد دستگاه خطي با $(j_{\max}-1)(l_{\max}-1)$ معادله و همين تعداد مجهول براي هر مقدار $(i=1,\ldots,i_{max}-1)$ حل شود. در واقع حل دقيق و کارامد سيستم معادله (۲۴)، گلوگاه روش حل عددي معادله KZK به‌شمار مي‌رود. بنابراين بايد با سريع‌ترين روش ممکن حل شود.

از سريع‌ترين روش‌هاي حل سيستم معادله (۲۴)، روش حل ماتريس‌هاي تنک[۴۴] است. در اينجا از حل ماتريس‌هاي تنک بر پايه روش حذف گوس با عنصر لولاي جزئي[۴۵] [۳۰] بهره گرفته شده است. پياده‌سازي الگوريتم حل ماتريس تنک در نرم افزار MATLAB به وسيله اپراتوري ويژه و در C++ به وسيله کتابخانه MKL[۴۶] صورت گرفته است.



شکل ۳- مثالي از ماتريس تنک سه قطري بلوکي متقارن با ۴۹×۴۹ عنصر. در اين ماتريس nz=۲۱۷ عنصر غير صفر وجود دارد.

۲-۲- روش ۵-نقطه کرانک-نيکلسون تفاضل محدود (۵-نقطه CNFD) [۲۸]

براي روش ۵-نقطه CNFD، تفاوت در جمله لاپلاسين عرضي مطابق معادله (۲۶) است:

$$\left(\frac{b}{a}\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}+\frac{a}{b}\frac{\partial^2 p}{\partial Y^2}\right)\rightarrow$$
$$\frac{1}{2(\Delta X)^2}\left(\begin{array}{l}\frac{b}{a}\left(P^{k+1}_{i,j+1,l}+P^{k}_{i,j+1,l}\right)+\frac{a}{b}\left(P^{k+1}_{i,j,l+1}+P^{k}_{i,j,l+1}\right)\\ -2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\left(P^{k+1}_{i,j,l}+P^{k}_{i,j,l}\right)\\ +\frac{a}{b}\left(P^{k+1}_{i,j,l-1}+P^{k}_{i,j,l-1}\right)+\frac{b}{a}\left(P^{k+1}_{i,j-1,l}+P^{k}_{i,j-1,l}\right)\end{array}\right) \qquad (۲۶)$$

براي راحتي و همچنين کاهش زمان محاسبات $Q^{k+1}_{i,j,l}=P^{k+1}_{i,j,l}+P^{k}_{i,j,l}$ فرض شده است [۲۱]. خطاي برش در اين روش از مرتبه $\left[(\Delta\sigma)^2+(\Delta\tau)^2+(\Delta X)^2+(\Delta Y)^2\right]$ است، که نشان‌دهنده دقت بيشتر روي Δσ نسبت به روش ۵-نقطه IBFD است؛ به همين دليل مي‌توان فاصله انتشار در هر مرحله را با حفظ دقت، بزرگ‌تر در نظر گرفت.

با اعمال تقريب ۵-نقطه CNFD در معادله (۱۸):

$$1\le j\le (j_{\max}-1),\ 1\le l\le (l_{\max}-1)$$

$$-\frac{R}{16}\frac{b}{a}Q^{k+1}_{i,j+1,l}-\frac{R}{16}\frac{a}{b}Q^{k+1}_{i,j,l+1}+\left(1+\frac{R}{8}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\right)Q^{k+1}_{i,j,l}$$
$$-\frac{R}{16}\frac{a}{b}Q^{k+1}_{i,j,l-1}-\frac{R}{16}\frac{b}{a}Q^{k+1}_{i,j-1,l}=$$
$$\frac{R}{8}\frac{b}{a}\sum_{m=1}^{i-1}Q^{k+1}_{i,j+1,l}+\frac{R}{8}\frac{a}{b}\sum_{m=1}^{i-1}Q^{k+1}_{i,j,l+1}-\frac{R}{4}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\sum_{m=1}^{i-1}Q^{k+1}_{i,j,l} \qquad (۲۷)$$
$$+\frac{R}{8}\frac{a}{b}\sum_{m=1}^{i-1}Q^{k+1}_{i,j,l-1}+\frac{R}{8}\frac{b}{a}\sum_{m=1}^{i-1}Q^{k+1}_{i,j-1,l}+2P^{k}_{i,j,l}$$
$$R=\frac{\Delta\tau(\Delta\sigma)_k}{(1+\sigma_{k+1/2})^2(\Delta X)^2}.$$

$\sigma_{k+1/2}=\sigma_k+(\Delta\sigma)_{k/2}$ تعريف شده است. تمامي جمله‌هاي Q در سمت راست معادله‌هاي (۲۷) مجهول هستند، در عوض جمله‌هاي Q و P در سمت چپ معلوم هستند. با مرتب‌سازي، بر اساس معادله (۲۵)، دوباره يک سيستم سه قطري بلوکي ظاهر مي‌شود و براي حل آن روش حل ماتريس‌هاي تنک ذکر شده مناسب است.

۳- نتايج و بحث

در اين بخش، شبيه‌سازي‌هاي عددي براي انتشار موج پالس و غيرخطي در سيال ترموويسکوز با شکل منبع دلخواه نمايش

[۴۳] Block tridiagonal system
[۴۴] Sparse solver
[۴۵] Gaussian elimination with partial pivoting
[۴۶] Math Kernel Library

دلخواه نمايش داده مي‌شود. تمام نتايج بر اساس الگوريتم ارائه شده در بخش قبل است. صحت الگوريتم پيشنهادي با تجميع سه جمله پراش، جذب و انتشار غيرخطي براي منبع دايروي، به وسيله الگوريتم لي ارزيابي شده است. در پايان، شبيه‌سازي عددي براي منبع مربعي كه از پركاربردترين مبدل‌هاي اولتراسوند است، آورده شده است. تمام شبيه‌سازي‌هاي ارائه شده با نرم‌افزار MATLAB ۷/۴ روي رايانه شخصي استاندارد صورت گرفته است. به علت محدوديت حافظه موقت، طول پنجره زماني كوچك‌تر و فاصله گره‌ها در صفحه عرضي بزرگ‌تر از تنظيمات ذكر شده در رساله دكتراي لي در نظر گرفته شده و روي خطاي ناشي از اين ملاحظات بحث شده است. تمامي نتايج براي پالس كوتاه[47] و پارامترهاي جذب و غيرخطي مشخص (A=۰/۱، N=۲) و بدون تابع مخروطي[48] به دست آمده است. در پالس كوتاه، اعوجاج موج و پديده ضربه به راحتي قابل نمايش است. پالس بلند[49]، نمايش اعوجاج روي پوش پالس را آسان مي‌كند ولي نياز به پنجره زماني طولاني دارد.

با توجه به محدوديت حافظه موقت، تنظيمات زير براي الگوريتم عددي در نظر گرفته شدند:

$$\tau_{\min} = -۴/۵\pi \text{ ، } \tau_{\max} = ۹\pi \text{ ، } \Delta\tau = ۰/۰۵ \qquad (۲۸)$$

$$X_{\max} = Y_{\max} = ۸ \text{ ، } \Delta X = \Delta Y = ۰/۰۵ \qquad (۲۹)$$

كه با تنظيمات لي در طول پنجره زماني و فاصله گره‌ها در صفحه عرضي تفاوت دارد؛ ولي در رايانه با حافظه موقت بالاتر به راحتي از تنظيمات متداول مي‌توان استفاده كرد. با وجود اين، در الگوريتم لي به دليل تقارن منبع و استفاده از مختصات قطبي، صفحه عرضي در واقع محور ρ است، ولي در الگوريتم پيشنهادي صفحه عرضي، صفحه XY است؛ به دليل مش‌بندي در يك بعد (محور □) و دو بعد (صفحه XY) تفاوت چنداني ناشي از افزايش فاصله گره‌ها در صفحه XY، براي دقت جواب روي صفحه عرضي به وجود نمي‌آيد.

نتايج الگوريتم پيشنهادي را با دو شبيه‌سازي از الگوريتم لي مقايسه مي‌كنيم. اول، تنظيمات استاندارد لي كه پنجره زماني طولاني استفاده كرده بود و سپس، پنجره زماني كوتاه در نظر مي‌گيريم، كه به ترتيب با (Lee, LTW) و (Lee, ShTW) نمايش داده مي‌شوند. همچنين از اختصار (GS, ShTW) براي منحني جواب الگوريتم پيشنهادي استفاده شده است.

تابع تحريك پالس كوتاه را مي‌توان حاصل مدولاسيون يك تابع سينوسي با يك پوش گوسي در نظر گرفت:

$$f(\tau) = \exp\left[-\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)^2\right]\sin(\omega_0\tau) \qquad (۳۰)$$

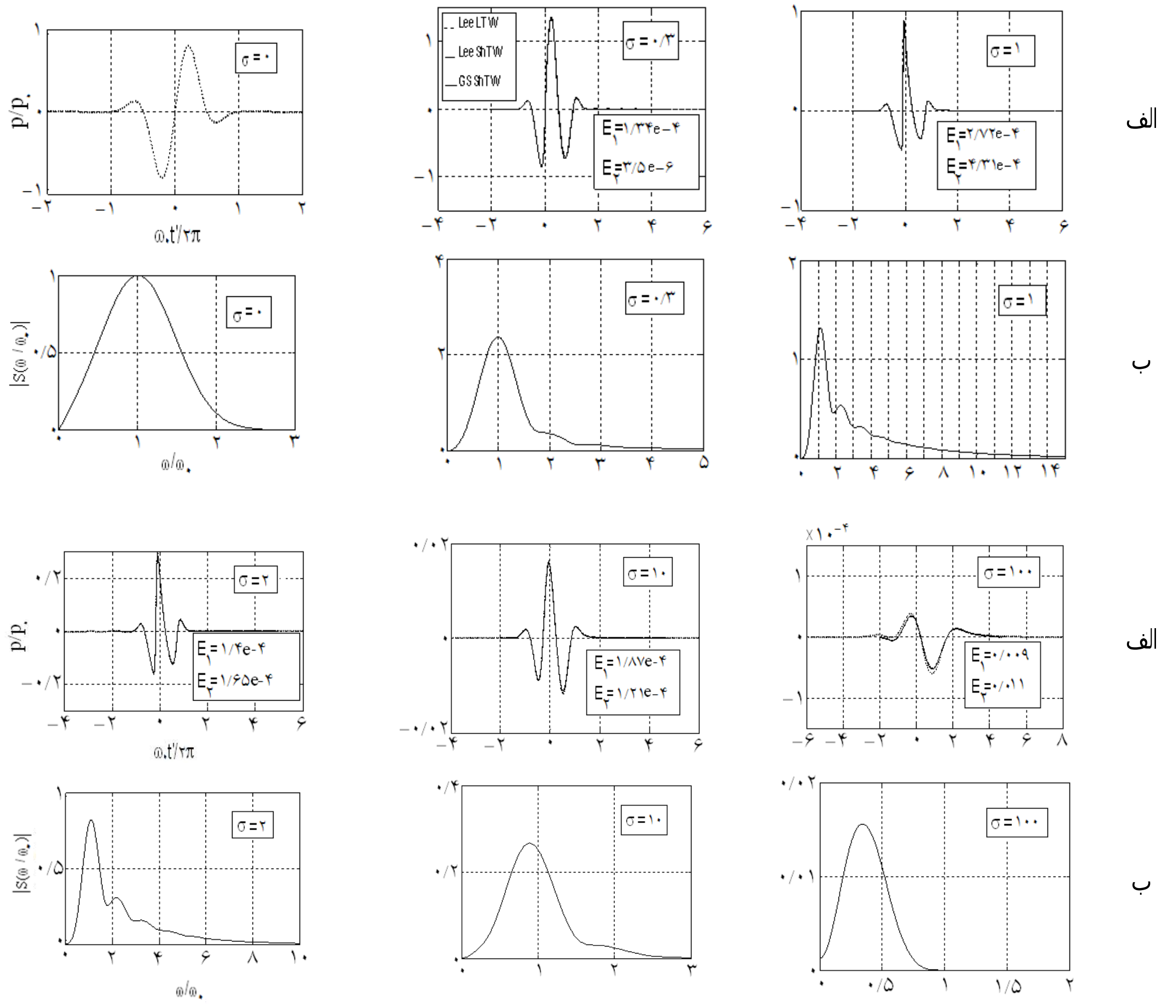
كه آن را در شرط منبع، معادله (۸) قرار مي‌دهيم.

اعوجاج، توليد هارمونيك‌هاي بالاتر و ايجاد موج شوك به وضوح در شكل ۴ ديده مي‌شود. شكل الف-۴، شكل موج پيش‌بيني شده با در نظر گرفتن ۳ اثر پراش، جذب و انتشار غيرخطي براي منبع دايروي را روي محور انتشار نشان مي‌دهد. نقطه چين نماينده پنجره زماني طولاني الگوريتم لي، به عنوان شكل موج مرجع است. منحني خط نقطه، شبيه‌سازي پنجره زماني كوتاه الگوريتم لي را نشان مي‌دهد. بالاخره، الگوريتم پيشنهادي به‌وسيله منحني ممتد رسم شده است. در شكل ب-۴ محتواي فركانسي در هر فاصله نمايش داده شده است. با اين تنظيمات براي مشاهده كامل پديده خود آشكارساز[50]، محدوديت وجود خواهد داشت. شكل موج، بر رو و خارج محور انتشار براي فواصل σ=۱ و σ=۲ در شكل‌هاي ۵ و ۶ ديده مي‌شود. از آنجا كه الگوريتم پيشنهادي مستقل از شكل منبع است، بنابراين چنين نتايجي مي‌تواند تأييدي بر الگوريتم پيشنهادي باشد.

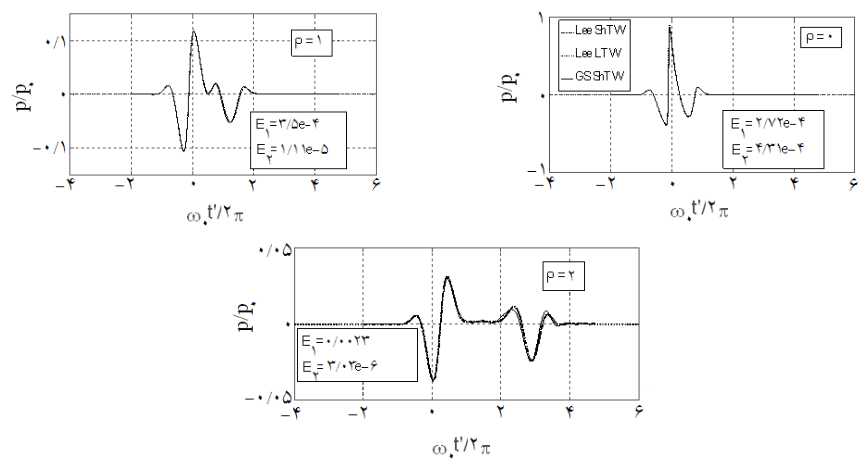
در اين بخش، شبيه‌سازي شكل موج اولتراسوند غيرخطي در سيال ترموويسكوز براي شكل منبع مربعي كه از پركاربردترين مبدل‌هاي اولتراسوند است، ارائه مي‌شود. شكل ۷، شكل موج را روي محور انتشار به همراه محتواي فركانسي آن در فاصله‌هاي مختلف براي منبع مربعي نمايش مي‌دهد.

براي نمايش شكل موج، خارج از محور انتشار، دسته شكل موج‌هاي عرضي در فاصله‌هاي مختلف به صورت سه‌بعدي رسم شده است. شكل ۸، اين نمايش سه‌بعدي را نشان مي‌دهد.

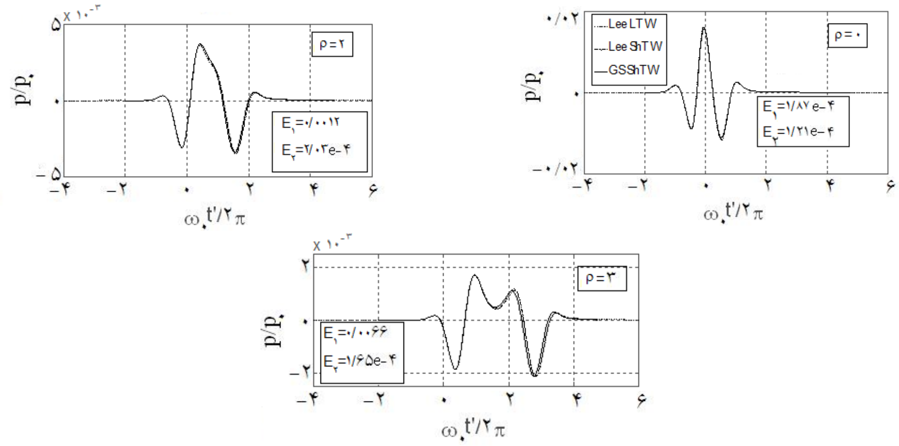
[47] Short tone burst
[48] Apodization function
[49] Long Tone Burst
[50] Self-Demodulation



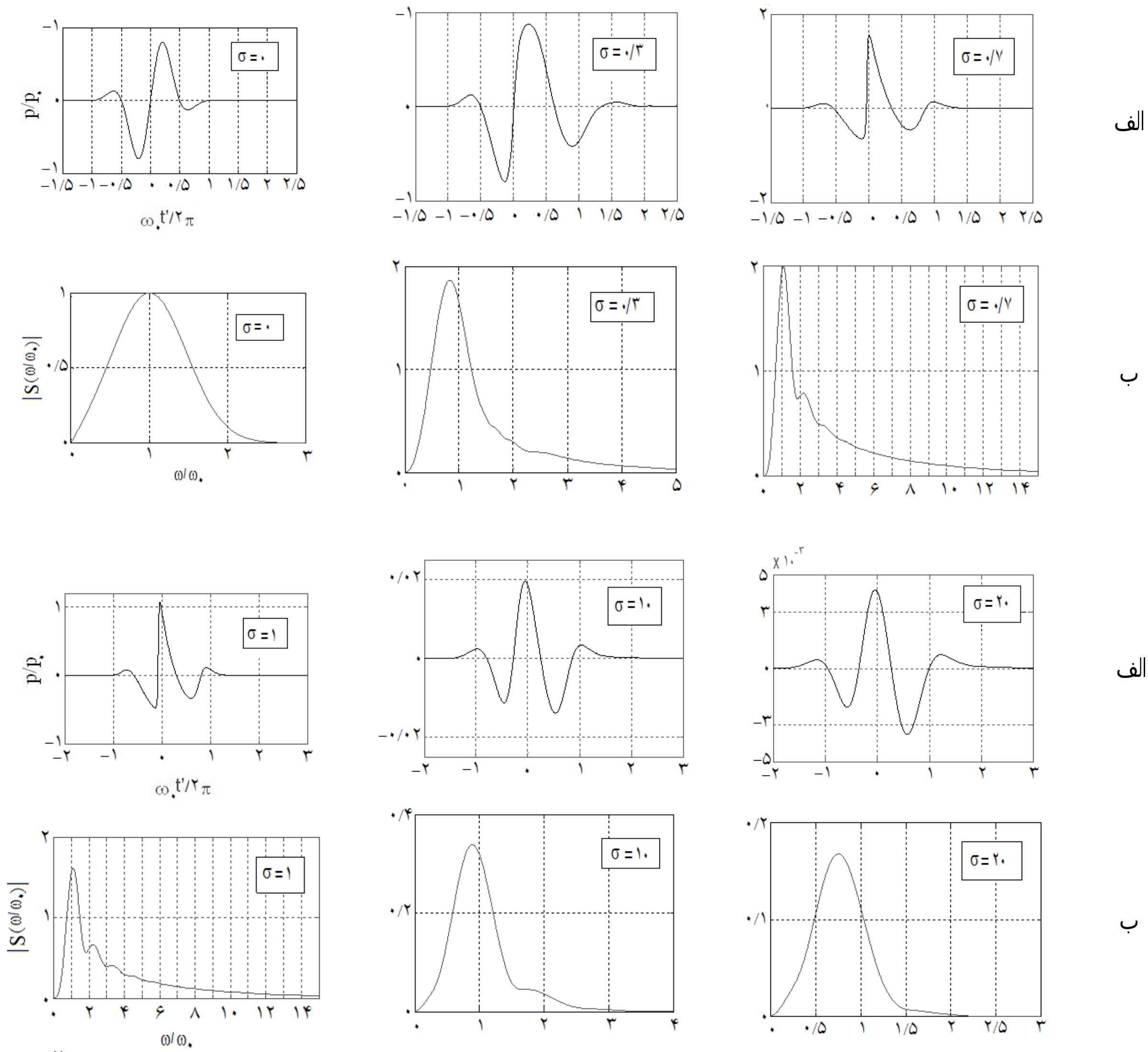
شکل ۴- الف) شکل موج ناشي از حل معادله KZK بر روي محور انتشار براي منبع دايروي تخت و ب) محتواي فرکانسي مربوط به آن. در نمودارهاي (الف)، نقطه چين: پنجره زماني طولاني الگوريتم لي به عنوان مرجع مقايسه، با تنظيمات [$\Delta\rho=$ ۰/۰۳]، خط نقطه: پنجره زماني کوتاه الگوريتم لي با تنظيمات [$\Delta\rho=$ ۰/۰۵] و منحني ممتد: الگوريتم پيشنهادي (شکل منبع کلي) براي منبع دايروي [$\Delta X=\Delta Y=$ ۰/۰۵]. طول پنجره زماني طولاني و کوتاه به ترتيب، ($\tau_{max}=$ ۲۲π ، $\tau_{min}=$ -۱۲π) و ($\tau_{max}=$ ۹π ، $\tau_{min}=$ -۴/۵π) فرض شده است. E_1 و E_2 به ترتيب، ميزان ميانگين مربعات خطا بين منحني ممتد و خط نقطه با منحني مرجع (نقطه چين) را نشان مي‌دهد.



شکل ۵- شکل موج در صفحه عرضي براي فاصله $\sigma=1$. نقطه چين: پنجره زماني کوتاه الگوريتم لي به عنوان مرجع مقايسه، خط نقطه: پنجره زماني کوتاه الگوريتم لي و منحني ممتد: الگوريتم پيشنهادي (شکل منبع کلي) براي منبع دايروي. E_1، E_2 و تنظيمات مطابق شکل ۴ هستند.

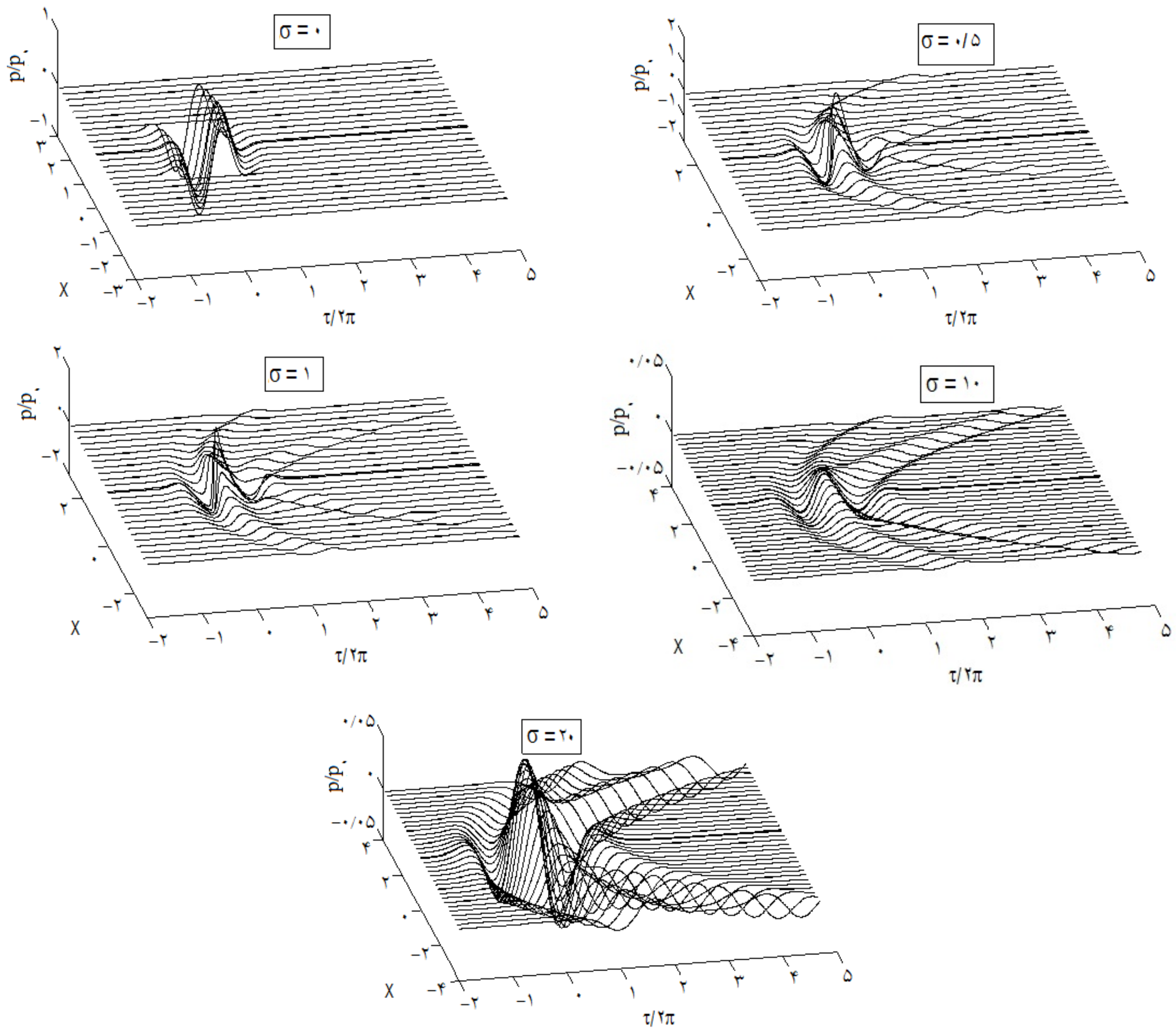


شکل ۶- شکل موج در صفحه عرضي براي فاصله $\sigma = ۱۰$. نقطه چين: پنجره زماني كوتاه الگوريتم لي به عنوان مرجع مقايسه، خط نقطه: پنجره زماني كوتاه الگوريتم لي و منحني ممتد: الگوريتم پيشنهادي (شكل منبع كلي) براي منبع دايروي. E_1، E_2 و تنظيمات مطابق شکل ۴ هستند.



شکل ۷- الف) شکل موج ناشي از حل معادله KZK بر روي محور انتشار براي منبع مربعي تخت و ب) محتواي فرکانسي مربوط به آن.

[$\Delta X = \Delta Y = ۰/۰۵$] و طول پنجره زماني ($\tau_{max} = ۹\pi$ ، $\tau_{min} = -۴/۵\pi$) فرض شده است.



شکل ۸- شکل موج در صفحه عرضي براي فواصل مختلف

۴- نتیجه‌گیري

در این مقاله، الگوریتم حوزه زمان لي براي شبیه‌سازي انتشار موج پالس اولتراسوند غیرخطي با منبع کلي (دلخواه) تعمیم داده شد و جمله پراش به صورت یکجا و بدون شکستن اپراتور لاپلاسین به دو جهت x و y محاسبه شد. الگوریتم بر پایه حل معادله KZK که یک مدل غیرخطي سه‌بعدي جهت‌دار و پرکاربرد در سیال ترموویسکوز است، بنا شده است. کاربردهاي روزافزون اولتراسوند غیرخطي با مبدل‌هاي گوناگون در پزشکي، انگیزه اصلي این تحقیق بوده است. شبیه‌سازي‌هاي این مقاله روي تابع تحریک سینوسي با پوش گوسي صورت گرفته است. علاوه بر این، الگوریتم پیشنهادي به علت اینکه در حوزه زمان طراحي شده است، توانایي شبیه‌سازي تابع تحریک اغتشاش را داراست.

براي تأیید صحت الگوریتم پیشنهادي، نتایج حاصل از منبع دایروي، با الگوریتم لي مقایسه و انطباق دقیقي مشاهده شد. البته اندکي ناحیه صحت و دقت جواب نسبت به الگوریتم لي کاهش پیدا کرده است که به خاطر محدودیت حافظه موقت رایانه شخصي استاندارد است. بیش از ۹۵% زمان محاسبات و همچنین اعمال محدودیت‌هاي مش‌بندي در الگوریتم پیشنهادي به محاسبه جمله پراش اختصاص دارد. بنابراین، جمله پراش گلوگاه الگوریتم است. استفاده از پردازش موازي براي بهینه شدن الگوریتم پیشنهادي مي‌تواند بسیار کارامد باشد. با اصلاحات و افزودن توابعي که در دسترس است، مي‌توان شبیه‌سازي محیط بافت و محیط ناهمگن را به الگوریتم افزود.

مراجع

[1] Li Y., and Zagzebski J. A., Computer model for harmonic ultrasound Imaging. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, 2000; 47: 1000–1013.

[2] Huber S., Steinbach R., Sommer O., Zuna I., Czembirek H., and Delorme S., Contrast-enhanced power Doppler harmonic imaging-influence on visualization of renal vasculature. Ultrasound Med Biol., 2000; 26: 1109-15.

[3] Rassweiler J.J., Renner C., Chaussy C., and Thuroff S., Treatment of renal stones by extracorporeal shockwave lithotripsy - An update. European Urology, 2001; 39: 187-199.

[4] Averkiou M.A., and Cleveland R.O., Modeling of an electrohydraulic lithotripter with the KZK. J. Acoust. Soc. Am., 1999; 106: 102–112.

[5] Tavakkoli J., Birer A., Arefiev A., Prat F., Chapelon J.Y., and Cathignol D., A piezocomposite shock-wave generator with electronic focusing capability: application for producing cavitation-induced lesions in rabbit liver, Ultrasound Med. Biol., 1997: 23:107-115.

[6] Roberts W.W., Hall T.L., Ives K., Wolf J.S., Fowlkes J.B., and Cain C.A., Pulsed cavitational ultrasound: a noninvasive technology for controlled tissue ablation (Histotripsy) in the rabbit kidney, J. Urology, 2006; 175: 734-738.

[7] ter Haar G., Therapeutic applications of ultrasound. Progress in Biophysics and Molecular Biology, 2007; 93: 111-129.

[8] Vaezy S., Martin R., and Crum L.A., High Intensity Focused Ultrasound: A Method of Hemostasis, Echocardiography a Journal of Cardiovascular Ultrasound & Allied Techniques, 2001; 18:309-315.

[9] Coleman D.J., Lizzi F.L., Driller J., and Rosado A.L., Burgess S.E.P., Torpey J.H., Smith M.E., Silverman R.H., Yobolonski M.E., Chang S., Rondeau MJ., Therapeutic ultrasound in the treatment of glaucumo II. Clinical applications, Opthalmology, 1985; 92: 347-53.

[10] Arefiev A., Prat F., Chapelon J.Y., Tavakkoli J., and Cathignol D., Ultrasound-induced tissue ablation: studies on isolated perfused porcine liver, Ultrasound Med. Biol., 1998; 24: 1033-1043.

[11] Foley J.L., Vaezy S., and Crum L.A., Applications of high-intensity focused ultrasound in medicine: Spotlight on neurological applications, Applied Acoustics, 2007; 68: 245–259.

[12] White W.M., Makin I.R.S., Barthe P.G., Slayton M.H., and Gliklich R.E., Selective Creation of Thermal Injury Zones in the Superficial Musculoaponeurotic System Using Intense Ultrasound Therapy: A New Target for Noninvasive Facial Rejuvenation, Arch. Facial Plast. Surg., 2007; 9:22-29.

[13] Kuznetsov V.P., Equations of nonlinear acoustics, Sov. Phys. Acoust., 1971; 16: 467-470.

[14] Cleveland R.O., Hamilton M.F. and Blackstock D.T., Time-domain modeling of finite-amplitude sound in relaxing fluids, J. Acoust. Soc. Am., 1996; 99: 3312-3318.

[15] Bakhvalov N.S., Zhileikin Y.M., and Zabolotskaya S.A., Nonlinear Theory of Sound Beams, American Institute of Physics, New York, 1987.

[16] Godunov S.K., Difference method for the numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamical equations, Mat. Sb., 1959; 47: 271-306.

[17] Aanonsen S.I, Barkve T., Tjotta J.N., and Tjotta S., Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam, J. Acoust. Soc. Am., 1984; 75: 749-768.

[18] Baker A.C., Berg A.M., Sahin A., and Tjøtta J.N., The nonlinear pressure field of plane rectangular apertures: experimental and theoretical results, J. Acoust. Soc. Am., 1995: 97:3510 - 3517.

[19] Lee Y.S., and Hamilton M.F., Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams, J. Acoust. Soc. Am., 1995; 97:906-917.

[20] Lee Y.S., Numerical solution of the KZK equation for pulsed finite amplitude sound beams in thermoviscous fluid, Ph.D. thesis, University of Texas, 1993.

[21] Fletcher C.A.J., Computational Techniques for Fluid Dynamics: Fundamentals and General Techniques, second edition (Springer-Verlag, Berlin), 1991: 251-254.

[22] Szabo T.L., Time domain nonlinear wave equations for lossy media, in Advances in Nonlinear Acoustics: Proc. of 13th ISNA, ed. H. Hobaek, (World Scientific, Singapore), 1993: 89-94.

[23] Christopher P.T., and Parker K.J., New approaches to nonlinear diffractive field propagation, J. Acoust. Soc. Am., 1991; 90:488-499.

[24] Tavakkoli J., Cathignol D., Souchon R., and Sapozhnikov O.A., Modeling of pulsed finite-amplitude focused sound beams in time domain, J. Acoust. Soc. Am., 1998; 104:2061-2072.

[25] Zemp R.J., Tavakkoli J, and Cobbold R.S.C., Modeling of nonlinear ultrasound propagation in tissue from array transducers, J. Acoust. Soc. Am., 2003; 113: 139-152.

[26] Khokhlova V.A., Souchon R., Tavakkoli J., Sapozhnikov O.A., and Cathignol D., Numerical modeling of finite-amplitude sound beams: shock formation in the near field of a CW plane piston source. J. Acoust. Soc. Am., 2001; 110: 95-108.

[27] Yang X. and Cleveland R.O., Time domain simulation of nonlinear acoustic beams generated by rectangular pistons with application to harmonic imaging, J. Acoust. Soc. Am., 2005; 117: 113-123.

[۲۸] پایان‌نامه کارشناسي ارشد، مجتبي حاجي‌حسني، بررسي تحليلي و حل عددي معادله KZK براي انتشار پالس در محيط غيرخطي با منبع نامتقارن، دانشگاه صنعتي شريف، دانشكده برق، بهار ۱۳۸۷.

[29] LeVeque, R. J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002: 436-446.

[30] Sherman, A. H., Algorithms for Sparse (Gaussian) Elimination with Partial Pivoting, ACM Trans. Math. Software, 1978; 4(4): 330-338.