DOI: 10.22041/ijbme.2008.13549

Applying the Blind Separation of Correlated Sources for FECG Extraction based on the Second Order Statistics

M.R. Aghabozorgi Sahaf

Assistant Professor, Communication Department, Electrical and Computer Engineering School, Yazd University, Yazd, Iran

Abstract

The extraction of the fetal electrocardiogram (FECG) from the skin electrode signals recorded of the mother's body is a problem of concern to signal processing. Blind signal separation (BSS) technique that separates some signals from their combinations without acknowledgments about transmission channel, is a fundamental method for solving this problem. The most proposed BSS algorithm for separation of fetal electrocardiogram (FECG) and mother electrocardiogram (MECG) relies on the independence of these signals (ICA). This paper introduces a novel technique for the cases that signals are correlated with each other, i.e. considering a real assumption. The method uses Wold decomposition principle for extracting the desired and proper information from the predictable part of the measured data, and exploits approaches based on the second-order statistics to estimate source signals. Simulation results are showed the effectiveness of the method for separation of electrocardiogram signals.

Keywords: **FECG extraction; Blind source separation; Independent component analysis; Wold decomposition; Second order statistics**

* **Corresponding author**
Address: *Masoud Reza Aghabozorgi Sahaf, Communication Department, Electrical and Computer Engineering School, Yazd University, P.O.BOX 89195-741, Yazd, Iran*
Tel: *+98 351 8122386,+98 9133555913*
Fax: *+98 351 8210699*
E-mail: *aghabozorgi@yazduni.ac.ir*

DOI: 10.22041/ijbme.2008.13549

به‌كارگيري جداسازي كور منابع سيگنال همبسته براي استخراج الكتروكارديوگرام جنين بر اساس آمارگان‌هاي مرتبه دوم

مسعودرضا آقابزرگي صحاف

استاديار گروه مخابرات، دانشكده مهندسي برق و كامپيوتر، دانشگاه يزد، يزد

چكيده

استخراج الكتروكارديوگرام جنين (FECG) از سيگنال‌هاي الكتريكي ثبت شده به‌وسيله الكترودهاي قرار داده شده بر روي بدن مادر با توجه به اهميتي كه براي بررسي سلامت جنين دارد، از مسائل مطرح در مهندسي پزشكي و پردازش سيگنال‌هاي حياتي است و بنابراين روش جداسازي كور منابع سيگنال كه در آن لازم است يك يا چند سيگنال مطلوب صرفاً از اطلاعات تركيبات اندازه‌گيري شده آنها به‌وسيله چند گيرنده بدون در اختيار بودن مشخصات كانال انتقال استخراج گردد، يكي از روش‌هاي اساسي براي حل اين مسأله به‌شمار مي‌آيد. بيشتر الگوريتم‌هاي جداسازي كور منابع پيشنهاد شده براي جداسازي ECG جنين و ECG مادر بر پايه فرض استقلال اين سيگنال‌هاست (تحليل مؤلفه‌هاي مستقل). اين مقاله روش جديدي را با در نظر گرفتن فرض واقعي‌تر همبسته بودن سيگنال‌ها با يكديگر پيشنهاد مي‌دهد. روش مورد نظر بر اساس اصل تجزيه والد به استخراج داده‌هاي مطلوب از داده‌هاي ثبت شده پرداخته و با به‌كارگيري الگوريتمي بر پايه آمارگان‌هاي مرتبه دوم، تخميني از سيگنال‌هاي مورد نظر را به‌دست مي‌آورد. نتايج شبيه‌سازي بر روي سيگنال‌هاي الكتروكارديوگرام، مؤثر بودن روش پيشنهادي را نشان مي‌دهد.

واژه‌هاي كليدي: استخراج الكتروكارديوگرام جنين؛ جداسازي كور منابع؛ تحليل مؤلفه‌هاي مستقل؛ تجزيه والد؛ آمارگان‌هاي مرتبه دوم

* عهده‌دار مكاتبات

نشاني: يزد، صفائيه، خيابان پژوهش، دانشگاه يزد، دانشكده مهندسي برق و كامپيوتر، صندوق پستي: ۷۴۱-۸۹۱۹۵

تلفن: ۸۱۲۲۳۸۶-۰۳۵۱؛ ۰۹۱۳۳۵۵۵۹۱۳، **دورنگار**: ۸۲۱۰۶۹۹-۰۳۵۱، **پيام نگار**: aghabozorgi@yazduni.ac.ir

۱- مقدمه

يكي از مسائل مورد توجه در مهندسي پزشكي مرتبط با پردازش سيگنال، استخراج الكتروكارديوگرام جنين[1] (FECG) است. بديهي است اين مسأله در مواردي كه بررسي شرايط قلبي جنين مورد نياز باشد، اهميت مي‌يابد [۱، ۲]. يكي از روش‌هاي مطرح براي دستيابي به اطلاعات FECG، قرار دادن تعدادي الكترود بر روي نقاط مختلف بدن مادر و جمع‌آوري سيگنال‌هاي دريافتي به‌وسيله اين الكترودهاست. داده‌هاي مشاهده شده به‌كمك اين الكترودها تركيبي از FECG و ECG مادر هستند كه براي رسيدن به هدف مورد نظر بايد به‌نحوي اين سيگنال‌ها از يكديگر جداسازي شوند. با توجه به شرايط سيگنال‌ها و نحوه دريافت آنها، مسأله مورد نظر را مي‌توان به‌صورت مسأله جداسازي كور منابع (سيگنال‌ها)[2] مدل كرد [۳، ۴].

BSS عبارت است از جداسازي، بازآوري و تخمين سيگنال‌هايي كه توسط چند منبع در يك سيستم تركيب كننده (كانال انتقال سيگنال‌ها) نامشخص منتشر شده‌اند و فقط تركيباتي از آنها مشاهده شده است. اين مشاهدات به‌وسيله چند گيرنده كه هر كدام تركيب متفاوتي از سيگنال‌هاي منابع را دريافت كرده، به‌دست آمده‌اند.

به‌كارگيري قيد كور در اين مسأله كه از مسائل روبه گسترش در حوزه پردازش سيگنال است، به‌علت عدم وجود اطلاعات از سيگنال‌هاي منابع و سيستم تركيب كنندة آنهاست بدين معنا كه جداسازي سيگنال‌هاي منابع بايد بدون دانستن مشخصات كانال انتقال انجام بپذيرد [۵]. هر چند فقدان اطلاعات مذكور موجب دشواري مسأله مي‌گردد اما همين متغير يكي از دلايل افزايش حيطه كاربرد اين مسأله است. مسأله مذكور به‌دليل ماهيت كور بودن در زمينه‌هاي متعددي و از جمله پردازش برخي سيگنال‌هاي پزشكي بروز مي‌كند. مسأله موردنظر اين مقاله از نوعي است كه در آن تركيب‌هايي از سيگنال‌هاي ناشي از قلب جنين و مادر با عبور از بدن مادر به‌عنوان كانال انتقال (سيستم تركيب كننده) به‌وسيله الكترودها (گيرنده‌ها) مشاهده و دريافت مي‌شوند.

كمبود اطلاعات در مسأله BSS به‌وسيله يک‌سري فرض‌هاي خاص آماري براي منابع سيگنال در الگوريتم‌هاي مختلف جبران مي‌شود. عمومي‌ترين فرض آماري كه توسط برخي الگوريتم‌هاي BSS در نظر گرفته شده است فرض قوي استقلال مابين منابع است. در اين روش‌ها منابع ارسال كننده سيگنال‌ها از نظر آماري، مستقل فرض مي‌شوند و در نتيجه راه حل مسأله اعمال يك پردازش جداسازي است به نحوي كه خروجي‌هاي حاصل از آن تا حد امكان مستقل از هم باشند. معروف‌ترين روشي كه در اين دسته الگوريتم‌ها به‌كار مي‌رود تحليل مؤلفه‌هاي مستقل[3] (ICA) است [۶، ۷]. دسته‌اي ديگر از الگوريتم‌ها فرض ضعيف‌تر ناهمبستگي منابع سيگنال را در نظر گرفته‌اند و با بهره‌برداري از همبستگي زماني سيگنال‌هاي هر منبع به جداسازي سيگنال‌هاي منابع مي‌پردازند اين روش‌ها به روش‌هاي آمارگان مرتبه دوم[4] معروف‌اند [۸، ۹].

هدف اين مقاله ارائه راه حل براي استخراج ECG جنين با به‌كارگيري روش BSS اما با در نظر گرفتن يک ويژگي واقعي‌تر بين سيگنال‌هاي FECG و ECG مادر يعني فرض همبسته بودن سيگنال‌هاست.

۲- معرفي مسأله جداسازي كور منابع

در اين بخش چارچوب و فرمول‌بندي رياضي مسأله جداسازي كور منابع با در نظر گرفتن مدل خطي تغيير ناپذير با زمان بيان مي‌گردد. اين مدل نه تنها از نظر رياضي به‌راحتي قابل بررسي است بلكه مورد قبول براي بسياري از كاربردها از جمله مسأله مورد بررسي در اين مقاله است [۳، ۴].

در نظر بگيريد كه d سيگنال از d منبع منتشر مي‌شود و تركيباتي خطي از اين سيگنال‌ها پس از عبور از كانال انتقال خطي تغييرناپذير با زمان توسط m گيرنده كه در m محل مختلف قرار دارند دريافت مي‌شوند، در واقع اين تركيب‌هاي دريافتي تنها مشاهدات و داده‌هاي مسأله مورد نظرند. بنابراين مدل رياضي زير براي اين مسأله قابل بيان است:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \qquad (۱)$$

كه در آن $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), \ldots, s_d(t)]^T$ بردار منابع است كه هر عضو آن، سيگنال نامعلوم ارسال شده از يكي از منابع است.

[1] **F**etal **E**lectro**C**ardio**G**ram
[2] **B**lind **S**ource (Signal) **S**eparation
[3] **I**ndependent **C**omponent **A**nalysis
[4] **S**econd **O**rder **S**tatistics

ماتريس $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{j=1,\dots,d}^{i=1,\dots,m}$ ، $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d]\in\Re^{m\times d}$ بيانگر كانال انتقال $m\times d$ بعدي است كه با نام ماتريس تركيب‌كننده خوانده مي‌شود و نامعلوم است. $\mathbf{X}(t)=[x_1(t),\dots,x_m(t)]^T$ بردار مشاهدات است كه هر عنصر آن سيگنال خروجي از هر گيرنده است به‌نحوي كه:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{a}_1.\mathrm{s}_1(t)+\dots+\mathbf{a}_d.\mathrm{s}_d(t)+\mathbf{n}(t) \qquad (۲)$$

$\mathbf{n}(t)=[n_1(t),\dots,n_m(t)]^T$ بردار نويز است كه هر عضو آن نويز ظاهر شده روي تركيب دريافت شده به‌وسيله گيرنده متناظر است. واضح است كه در مسأله مورد نظر اين مقاله، $\mathbf{S}(t)$ بردار سيگنال‌هاي ECG و A بيانگر مشخصات بدن مادر و $\mathbf{X}(t)$ بردار سيگنال‌هاي ثبت شده به‌وسيله الكترودهاست.

براي مدل فوق فرض‌هاي پايه‌اي زير نيز در نظر گرفته مي‌شود:

۱. هريك از عناصر $\mathbf{S}(t)$ فرايندي ايستان[5] با ميانگين صفر فرض مي‌شود؛

۲. هريك از عناصر $\mathbf{n}(t)$ نويز سفيد گوسي ايستان با ميانگين صفر فرض مي‌شود؛

۳. منابع سيگنال و نويز مستقل از هم فرض مي‌شوند؛

۴. ماتريس تركيب كننده A داراي رتبه ستوني كامل است يعني: $rank(\mathbf{A})=d$. اين تنها شرطي است كه روي ماتريس اعمال مي‌شود و اين ماتريس مي‌تواند از هر نظر ديگري نامعلوم باشد.

شايان تأكيد است كه در شرايط فوق هيچ فرضي در مورد استقلال يا حتي ناهمبستگي سيگنال‌هاي منابع، اعمال نشده است؛ به‌عبارت ديگر سيگنال‌هاي منابع مي‌توانند همبسته باشند.

هدف در مسأله BSS به‌دست آوردن (بازآوري) سيگنال‌هاي منابع (سيگنال‌هاي FECG و ECG مادر) فقط بر اساس اطلاعات در دسترس يعني داده‌هاي ناشي از تركيبات خطي سيگنال‌ها مشاهدات گيرنده‌ها (الكترودها) است. بنابراين مي‌توان به‌دست آوردن و تشخيص ماتريس تركيب كننده A را به‌عنوان يك هدف مياني مد نظر داشت، يعني:

$$\mathbf{X}(t) \xrightarrow{Identification} \hat{\mathbf{A}} \xrightarrow{Separation} \hat{\mathbf{S}}(t)$$

۳- مرحله پيش‌پردازش

مهمترين مرحله روش مورد بحث، ارائه يك روش پيش‌پردازش است. در اين مرحله داده‌هاي مشاهده شده با به‌كارگيري اصل تجزيه والد[6] (WD) به دو بخش متعارف[7] و قابل پيش‌بيني[8] تجزيه مي‌شوند. سپس از بخش قابل پيش‌بيني، اطلاعاتي در مورد بخش ناهمبسته سيگنال‌هاي منابع استخراج مي‌شود كه بر اساس آنها با به‌كارگيري روش‌هاي آمارگان مرتبه دوم ماتريس A و سپس سيگنال‌هاي منابع تخمين‌زده مي‌شوند [۱۰]. در اين بخش پس از معرفي تجزيه والد، كاربرد آن بر روي داده‌ها بيان شده و سپس روند پيش‌پردازش پيشنهادي ارائه مي‌گردد.

۳-۱- تجزيه والد

یک فرايند دلخواه $s(t)$ را مي‌توان به‌صورت زير نوشت [۱۱]:

$$s(t)=s_r(t)+s_p(t) \qquad (۳)$$

كه در آن $s_r(t)$ یک فرايند متعارف و $s_p(t)$ یک فرايند قابل پيش‌بيني است. به اين نمايش یک فرايند تجزيه والد گفته مي‌شود. در مطالعات به‌عنوان یک ويژگي مهم براي فرايندهاي متعارف $s_r(t)$ و قابل پيش‌بيني $s_p(t)$ اثبات شده است كه دو فرايند نسبت به هم متعامدند [۱۱]:

$$\mathrm{E}\{s_r(t+\tau)s_p^*(t)\}=0 \quad ,\forall t,\tau \qquad (۴)$$

به‌علاوه فرايند قابل پيش‌بيني $s_p(t)$ تركيبي از توابع نمايي مختلط است:

$$s_p(t)=\sum_i \mathbf{c}_i.\exp(j\omega_i t) \qquad (۵)$$

كه در رابطه فوق براي فرآيند قابل پيش‌بيني، $\mathbf{c}_i$ متغيرهاي تصادفي متعامد با ميانگين صفرند. بنابراين فرايند قابل پيش‌بيني $s_p(t)$ داراي طيف خطي[9]، يعني طيفي از پرش‌ها در فركانس‌هاي مختلف، به‌صورت زير است:

[5] Stationary
[6] **W**old **D**ecomposition
[7] Regular
[8] Predictable
[9] Line Spectrum

$$P_{s_p}(\omega) = \sum_i 2\pi\alpha_i\,\delta(\omega-\omega_i) \qquad (۶)$$

در حالي‌كه فرآيند متعارف $s_r(t)$ داراي طيف هموار[10] مي باشد.

۳-۲- تجزيه مشاهدات

در اين قسمت روشي طيفي براي تجزيه و استخراج اطلاعاتي از مؤلفه‌هاي متعارف و قابل پيش‌بيني مشاهدات بر اساس خواص تجزيه والد، پيشنهاد مي‌شود. البته براي جلوگيري از پيچيدگي روابط و ساده‌تر شدن تبيين روش يك حالت خاص مدل يعني d=2، m=2 در نظر گرفته مي‌شود كه قابل بسط به حالات كلي‌تر است. بنابراين مدل (۱) را به‌صورت ساده زير خواهيم داشت:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}.\begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

كه در آن $s_1(t)$ و $s_2(t)$ سيگنال‌هاي منابع و $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$ ماتريس تركيب كننده است. بنابراين:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha_1 s_1(t) + \beta_1 s_2(t) + n_1(t) \\ x_2(t) &= \alpha_2 s_1(t) + \beta_2 s_2(t) + n_2(t) \end{aligned} \qquad (۸)$$

مؤلفه‌هاي متعارف و قابل پيش‌بيني سيگنال $s_i(t)$ را به ترتيب با $s_{ir}(t)$ و $s_{ip}(t)$ نمايش مي دهيم ($i=1,2$):

$$s_i(t) = s_{ip}(t) + s_{ir}(t) \qquad (۹)$$

كه در آن مؤلفه‌هاي قابل پيش‌بيني دو سيگنال را مي‌توان به‌صورت ذيل نوشت:

$$s_{1p}(t) = \sum_k \mathbf{a}_k.\exp(j\omega_{1k}t) \qquad (۱۰)$$

$$s_{2p}(t) = \sum_l \mathbf{b}_l.\exp(j\omega_{2l}t) \qquad (۱۱)$$

كه در آنها $\{\omega_{2l}\},\{\omega_{1k}\}$ مجموعه فركانس‌هاي مؤلفه‌هاي $s_{1p}(t)$ و $s_{2p}(t)$ و $\{\mathbf{a}_k\}$ و $\{\mathbf{b}_l\}$ مجموعه متغيرهاي تصادفي متعامدند. همچنين چون سيگنال‌ها به‌صورت مشترك ايستان‌اند، متغيرهاي تصادفي $\mathbf{a}_k$ و $\mathbf{b}_l$ متناظر با $\omega_{1k} \neq \omega_{2l}$ بر هم عمود خواهند بود.

با به‌كارگيري روابط (۸) و (۹) و ويژگي تعامد مؤلفه‌هاي متعارف و قابل پيش‌بيني روابط زير را براي مشاهدات خواهيم داشت:

$$x_i(t) = x_{ip}(t) + x_{ir}(t) + n_i(t) \quad ; \quad i=1,2 \qquad (۱۲)$$

كه در آن:

$$x_{ip}(t) = \alpha_i s_{1p}(t) + \beta_i s_{2p}(t) \quad ; \quad i=1,2 \qquad (۱۳)$$

$$x_{ir}(t) = \alpha_i s_{1r}(t) + \beta_i s_{2r}(t) \quad ; \quad i=1,2 \qquad (۱۴)$$

از روابط (۱۰)، (۱۱) و (۱۳) داريم:

$$x_{ip}(t) = \sum_q \mathbf{d}_{iq}.\exp(j\omega_q t) \quad ; \quad i=1,2 \qquad (۱۵)$$

كه در آن $\{\omega_q\}=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}$ و $\{\mathbf{d}_{iq}\}$ متغيرهاي تصادفي متعامد هستند.

روابط فوق بيانگر اين واقعيت‌اند كه هركدام از مؤلفه‌هاي متعارف و قابل پيش‌بيني هريك از مشاهدات به ترتيب متناظر با تركيب مؤلفه‌هاي متعارف و قابل پيش‌بيني سيگنال‌هاي وارد شده به آن گيرنده هستند. براين اساس در ادامه روش طيفي براي جداسازي مؤلفه‌ها ارائه مي‌شود.

توابع همبستگي مشاهدات با توجه به تعامد مؤلفه‌هاي متعارف و قابل پيش‌بيني هر سيگنال و استقلال نويز و سيگنال‌ها، به‌صورت زير مي‌باشند:

$$\begin{aligned} r^x_{ij}(\tau) &= E\{x_i(t+\tau)x_j^*(t)\} \quad ; \quad i,j=1,2 \\ &= r^x_{ijr}(\tau) + r^x_{ijp}(\tau) + N_0.\delta(\tau) \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

كه در آن N_0 واريانس نويز و $r^x_{ijr}(\tau)$ و $r^x_{ijp}(\tau)$ توابع همبستگي مؤلفه‌هاي متعارف و قابل پيش‌بيني هستند:

$$r^x_{ijr}(\tau) = E\{x_{ir}(t+\tau)x_{jr}^*(t)\} \qquad (۱۷)$$

$$\begin{aligned} r^x_{ijp}(\tau) &= E\{x_{ip}(t+\tau)x_{jp}^*(t)\} \\ &= \sum_q E\{\mathbf{d}_{iq}\mathbf{d}_{iq}^*\}.\exp(j\omega_q\tau) \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

و در نتيجه توابع چگالي طيفي توان[11] (psd) و چگالي طيفي متقابل[12] (csd) مشاهدات به صورت زير خواهند بود $(i, j = 1,2)$:

$$P^x_{ij}(\omega) = P^x_{ijr}(\omega) + P^x_{ijp}(\omega) + N_0 \qquad (۱۹)$$

كه در آن:

$$P^x_{ijp}(\omega) = \sum_q 2\pi.E\{\mathbf{d}_{iq}\mathbf{d}_{jq}^*\}.\delta(\omega-\omega_q) \qquad (۲۰)$$

همانطور كه انتظار مي‌رفت طيف بخش قابل پيش‌بيني به‌صورت مجموع ضربه‌هاي فركانسي (پرش‌هاي فركانسي) است، و بنابراين امكان آشكارسازي و در نتيجه جداسازي آنها از طيف ساير مؤلفه‌ها، كه طيفي هموار دارند، وجود دارد. سپس از روي $P^x_{ijp}(\omega)$ به‌دست آمده تابع همبستگي $r^x_{ijp}(\tau)$ قابل محاسبه است كه در قسمت بعد از آن استفاده خواهد شد.

---
[10] Smooth Spectrum
[11] **P**ower **S**pectral **D**ensity
[12] **C**ross **S**pectral **D**ensity

۳-۲- استخراج اطلاعات مطلوب از بخش قابل پيش‌بيني

با در نظر گرفتن $\{\Omega_n\}$ به‌عنوان مجموعه فركانس‌هاي مشترک بين دو سيگنال ارسالي، مؤلفه‌هاي قابل پيش‌بيني سيگنال‌هاي منابع يعني روابط (۱۰) و (۱۱) را مي‌توان به‌صورت زير بازنويسي كرد:

$$s_{1p}(t) = \sum_k \mathbf{a}_k.\exp(j\omega_{1k}t) + \sum_n \mathbf{a}_n.\exp(j\Omega_n t) \qquad (۲۱)$$

$$s_{2p}(t) = \sum_l \mathbf{b}_l.\exp(j\omega_{2l}t) + \sum_n \mathbf{b}_n.\exp(j\Omega_n t) \qquad (۲۲)$$

با توجه به دو رابطه فوق داريم:

۱. با توجه به فرض ايستاني مشترک سيگنال‌هاي منابع، متغيرهاي تصادفي $\mathbf{a}_k$ و $\mathbf{b}_l$ متناظر با $\omega_{1k} \neq \omega_{2l}$ متعامدند يعني: $E\{\mathbf{a}_k\mathbf{b}_l\} = 0$؛

۲. همبستگي مؤلفه‌هاي قابل پيش‌بيني سيگنال‌ها، $s_{1p}(t)$ و $s_{2p}(t)$، از همبستگي متغيرهاي تصادفي $\mathbf{a}_n$ و $\mathbf{b}_n$ متناظر با فركانس‌هاي $\{\Omega_n\}$ (مؤلفه‌هاي فركانسي مشترک بين دو سيگنال) ناشي مي‌شود؛

۳. با توجه به دو بند فوق، با حذف كردن مؤلفه‌هاي فركانسي مشترک سيگنال‌ها از بخش‌هاي قابل پيش‌بيني $s_{1p}(t)$ و $s_{2p}(t)$، بخش‌هاي باقي‌مانده از اين دو سيگنال ناهمبسته خواهند بود، يعني سيگنال‌هاي

$$\tilde{s}_{1p}(t) = \sum_k \mathbf{a}_k.\exp(j\omega_{1k}t) \qquad (۲۳)$$

$$\tilde{s}_{2p}(t) = \sum_l \mathbf{a}_k.\exp(j\omega_{2l}t) \qquad (۲۴)$$

ناهمبسته‌اند:

$$E\{\tilde{s}_{1p}(t+\tau).\tilde{s}_{2p}^{\,*}(t)\} = 0 \qquad (۲۵)$$

بر اساس روابط فوق و رابطه (۱۳) خواهيم داشت:

$$\begin{aligned} x_{ip}(t) &= [\alpha_i\tilde{s}_{1p}(t) + \beta_i\,\tilde{s}_{2p}(t)] + \\ &\sum_n (\alpha_i\mathbf{a}_n + \beta_i\mathbf{b}_n)\,.\exp(j\Omega_n t) \\ &= \tilde{x}_{ip}(t) + \sum_n (\alpha_i\mathbf{a}_n + \beta_i\mathbf{b}_n)\,.\exp(j\Omega_n t) \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

و در نتيجه رابطة (۲۰) به‌صورت زير در مي‌آيد:

$$\begin{aligned} P_{ijp}^{x}(\omega) &= \sum_q 2\pi.E\{\mathbf{d}_{iq}\mathbf{d}_{jq}^{\,*}\}\,\delta(\omega-\omega_q) \\ &+ \sum_n 2\pi.E\{\mathbf{d}_{in}\mathbf{d}_{jn}^{\,*}\}\,\delta(\omega-\Omega_n) \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

اكنون با حذف جملات متناظر با فركانس‌هاي مشترك، توابع چگالي طيفي مؤلفه‌هاي فركانسي نامشترك و توابع همبستگي مطلوب متناظر به‌صورت زير به‌دست مي‌آيند $(i,\ j = 1,2)$؛

$$\tilde{P}_{ijp}^{x}(\omega) = \sum_q 2\pi.E\{\mathbf{d}_{iq}\mathbf{d}_{jq}^{\,*}\}\,\delta(\omega-\omega_q) \qquad (۲۸)$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{ijp}^{x}(\tau) &= F^{-1}\{\tilde{P}_{ijp}^{x}(\omega)\} \\ &= E\{\tilde{x}_{ip}(t+\tau)\tilde{x}_{jp}^{\,*}(t)\} \\ &= E\{(\alpha_i\tilde{s}_{1p}(t+\tau) + \beta_i\,\tilde{s}_{2p}(t+\tau)).(\alpha_j\tilde{s}_{1p}(t) + \beta_j\,\tilde{s}_{2p}(t))^*\} \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

در نهايت چون $\tilde{s}_{1p}(t)$ و $\tilde{s}_{2p}(t)$ ناهمبسته‌اند ماتريس همبستگي بردار $\tilde{\mathbf{x}}_p(t) = [\tilde{x}_{1p}(t) \quad \tilde{x}_{2p}(t)]^T$ را با توجه به توابع به‌دست آمده در رابطه (۲۹) مي‌توان به‌صورت ماتريسي زير نوشت:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_p^{x}(\tau) &\overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11p}^{x}(\tau) & \tilde{r}_{12p}^{x}(\tau) \\ \tilde{r}_{21p}^{x}(\tau) & \tilde{r}_{22p}^{x}(\tau) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11p}^{s}(\tau) & 0 \\ 0 & \tilde{r}_{22p}^{s}(\tau) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}.\tilde{\mathbf{R}}_p^{s}(\tau).\mathbf{A}^H \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

و همان‌طور كه ملاحظه مي‌شود، در اين رابطه ماتريس همبستگي بردار مؤلفه‌هاي ناهمبسته سيگنال‌هاي منابع يعني $\tilde{\mathbf{s}}_p(t) = [\tilde{s}_{1p}(t) \quad \tilde{s}_{2p}(t)]^T$ ماتريس $\tilde{\mathbf{R}}_p^{s}(\tau)$، قطري با عناصر قطر اصلي است كه يك ويژگي مطلوب محسوب مي‌شود:

$$\tilde{r}_{iip}^{s}(\tau) = E\{\tilde{s}_{ip}(t+\tau)\tilde{s}_{ip}^{\,*}(t)\} \quad ; \ i = 1,2 \qquad (۳۱)$$

نمايش ماتريسي (۳۰) اساس الگوريتم جداسازي منابع خواهد بود كه در بخش بعد بيان مي‌شود.

۴- الگوريتم جداسازي كور منابع

در اين بخش با به‌كارگيري روش مبتني بر آمارگان‌هاي مرتبه دوم يعني الگوريتم SOBI [13] [۸، ۹] بر مدل به‌دست آمده بر اساس رابطه (۲۶) در بخش قبل براي مؤلفه‌هاي قابل پيش‌بيني مشاهدات يعني

$$\tilde{x}_{ip}(t) = \alpha_i\tilde{s}_{1p}(t) + \beta_i\,\tilde{s}_{2p}(t) \quad ; \ i = 1,2 \qquad (۳۲)$$

[13] **S**econd **O**rder **B**lind **I**dentification

به تخمين ماتريس تركيب كننده $\mathbf{A}$ و در نتيجه بازآوري سيگنال‌هاي منابع مي‌پردازيم. ايدة اين روش به فرم تجزيه قطري (۳۰) ماتريس همبستگي مشاهدات بر مي‌گردد كه ساختاري مناسب براي الگوريتم SOBI است. مراحل الگوريتم به ترتيب زير هستند:

۴-۱- متعامد سازي

بر اساس توضيحات بخش (۳-۲)، $\widetilde{s}_{1p}(t)$ و $\widetilde{s}_{2p}(t)$ ناهمبسته‌اند و بدون از دست دادن كلّيت مسأله فرض مي‌كنيم:

$$\widetilde{\mathbf{R}}_p^s(0) = \mathbf{I} \tag{۳۳}$$

اما بر اساس رابطه (۳۲) $\widetilde{x}_{1p}(t)$ و $\widetilde{x}_{2p}(t)$ همبسته بوده و بنابراين تبديل متعامد ساز كارهونن- لاو[۱۴] را بر روي آنها اعمال مي‌كنيم [۱۳]. ماتريس متعامد كننده از تجزيه ويژه ماتريس همبستگي $\widetilde{\mathbf{R}}_p^x(\tau)$ در $\tau = 0$ به‌دست مي‌آيد. اگر مقادير ويژة $\widetilde{\mathbf{R}}_p^x(0)$ را با μ_1, μ_2 و بردارهاي ويژه متناظر را با $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ نشان دهيم، ماتريس متعامد كننده T به‌صورت زير خواهد بود:

$$\mathbf{T} = [\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\mathbf{v}_1 \,,\, \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\mathbf{v}_2]^H \tag{۳۴}$$

كه در رابطه زير صدق مي‌كند:

$$\mathbf{T}.\widetilde{\mathbf{R}}_p^x(0).\mathbf{T}^H = \mathbf{I} \tag{۳۵}$$

همچنين بر اساس روابط (۳۰)، (۳۳) و (۳۵) داريم:

$$\mathbf{T}.\mathbf{A}.\widetilde{\mathbf{R}}_p^s(0).\mathbf{A}^H.\mathbf{T}^H = \mathbf{T}.\mathbf{A}.\mathbf{A}^H.\mathbf{T}^H = \mathbf{I} \tag{۳۶}$$

اين معادله نشان مي‌دهد كه ماتريس U=TA، ماتريس يكاني است و بنابراين ماتريس A را مي‌توان بعد از محاسبه ماتريس يكاني يكتاي[۱۵] U به‌شكل زير به‌دست آورد:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{U} \tag{۳۷}$$

۴-۲- به‌دست آوردن U

با اعمال ماتريس متعامد كننده T به طرفين رابطة (۳۰) ماتريس همبستگي متعامد $\overline{\mathbf{R}}_p^x(\tau)$ به‌دست مي‌آيد:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{R}}_p^x(\tau) &= \mathbf{T}\widetilde{\mathbf{R}}_p^x(\tau)\mathbf{T}^H \quad ; \forall \tau \neq 0\\ &= \mathbf{T}\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{R}}_p^s(\tau)\mathbf{A}^H\mathbf{T}^H\\ \overline{\mathbf{R}}_p^x(\tau) &= \mathbf{U}\widetilde{\mathbf{R}}_p^s(\tau)\mathbf{U}^H\end{aligned} \tag{۳۸}$$

و از آنجا كه U يكاني و $\widetilde{\mathbf{R}}_p^s(\tau)$ قطري است، معادله (۳۸) بيانگر قطري‌سازي يكاني[۱۶] $\overline{\mathbf{R}}_p^x(\tau)$ به‌وسيله تبديل يكاني U خواهد بود. به‌عبارت ديگر ماتريس يكاني U را مي‌توان به‌واسطه قطري‌سازي يكاني $\overline{\mathbf{R}}_p^x(\tau)$ در برخي $\tau \neq 0$ به‌دست آورد.

شايان ذكر است روش قطري‌سازي مشترك[۱۷] روش مطرحي براي به‌دست آوردن يک ماتريس يكاني يكتاي U براي تمام τها است [۸، ۱۲]، كه به قطري‌سازي همزمان مجموعه ماتريس‌هاي همبستگي متعامد در τهاي مختلف $\{\overline{\mathbf{R}}_p^x(\tau_i)\,|\, i = 1,2,...,K\}$ مي‌پردازد (ضميمه).

۴-۳- محاسبه A و $\mathbf{s}(t)$

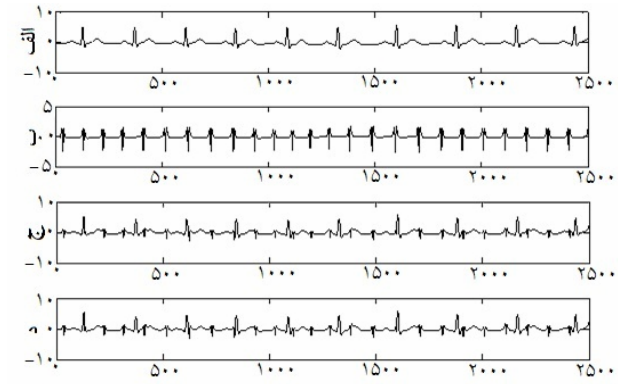
بعد از به‌دست آوردن ماتريس يكاني U، ماتريس A را مي‌توان مطابق رابطة (۳۷) محاسبه كرد ($\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}$) و در نتيجه منابع سيگنال به‌صورت زير تخمين زده مي‌شوند:

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{x}(t) \tag{۳۹}$$

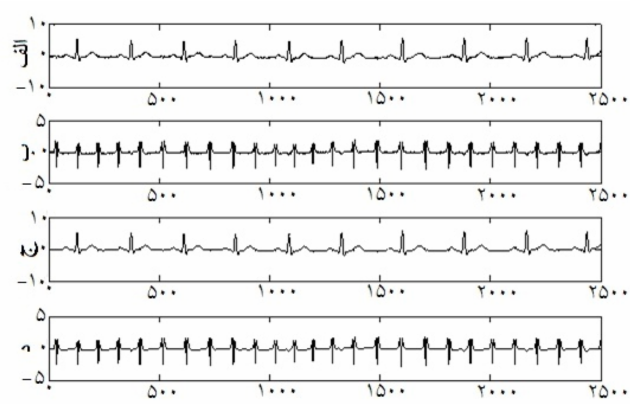
۵- نتايج شبيه‌سازي

در اين بخش عملكرد روش پيشنهادي از طريق شبيه‌سازي كامپيوتري بررسي مي‌شود. داده‌هاي استفاده شده براي شبيه‌سازي (سيگنال‌هاي FECG و ECG مادر) از [۱۴] گرفته شده اند.

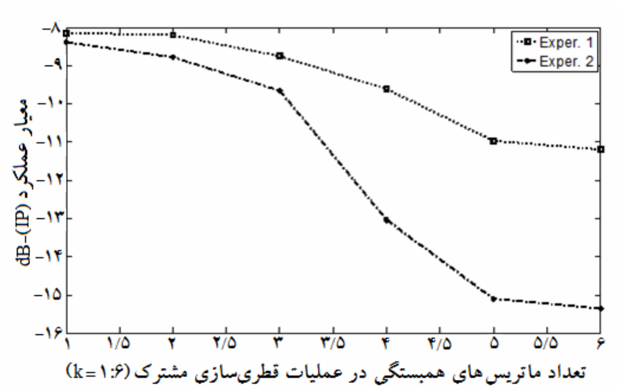
دو سري شبيه‌سازي بر روي داده‌هاي فوق اعمال شده است: يك سري بدون اعمال فرآيند پيش‌پردازش (Experiment#1) و يك سري با اعمال فرآيند پيش‌پردازش (Experiment#2) معرفي شده در بخش (۳). شبيه‌سازي‌ها تحت نسبت سيگنال به نويز[۱۸]هاي مختلف (يعني حالت بدون نويز و SNR=۱۰ ،۸ ،۵ ،۲ dB) و براي تعداد متفاوت (K=۱،...۶) از ماتريس‌هاي همبستگي به‌كار گرفته شده در الگوريتم JD، به تعداد G=۵۰۰ بار به‌طور مستقل اجرا شده اند. برخي از نتايج به‌دست آمده از شبيه‌سازي‌ها در شكل‌هاي ۱ تا ۸ ارائه شده است.



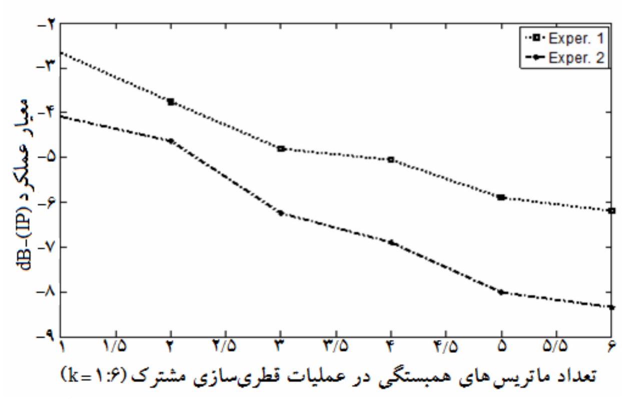
شکل۱- سیگنال‌ها: الف) ECG مادر، ب) FECG،
ج) ترکیب $x_1(t)$، د) ترکیب $x_2(t)$



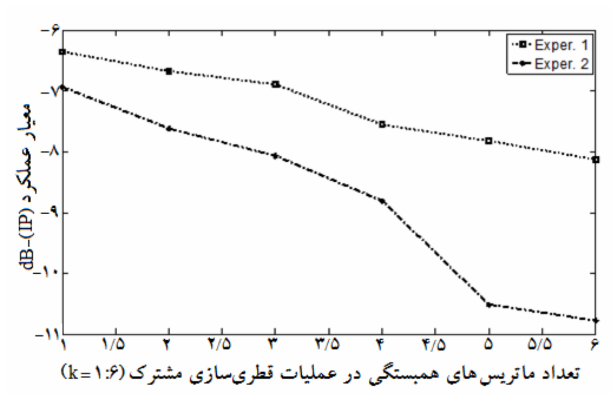
شکل۲- سیگنال‌هاي استخراج شده:
الف) $s_1(t)$ از Experiment#1، ب) $s_2(t)$ از Experiment#1،
ج) $s_1(t)$ از Experiment#2، د) $s_2(t)$ از Experiment#2.



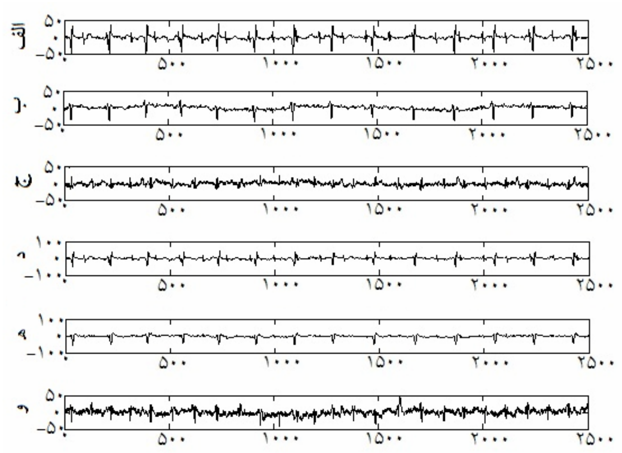
شکل۳- معیار عملکرد PI بر حسب تعداد ماتریس‌هاي همبستگي
در عملیات قطري‌سازي مشترك [K=۱:۶ و حالت بدون نویز]



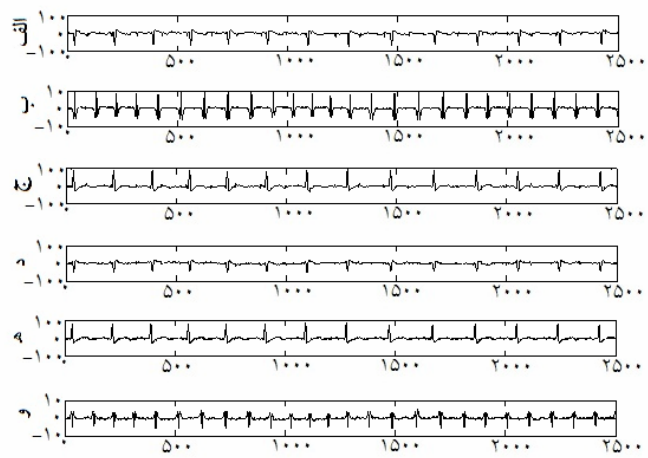
شکل۴- معیار عملکرد PI بر حسب تعداد ماتریس‌هاي همبستگي
در عملیات قطري‌سازي مشترك [K=۱:۶ و حالت نویز ۲ dB]



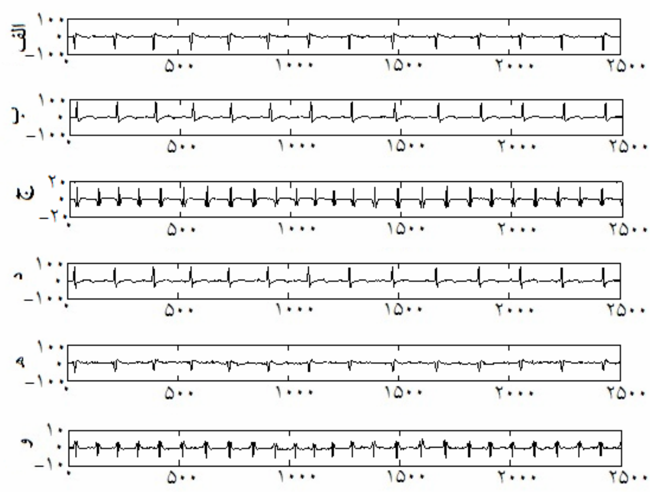
شکل۵- معیار عملکرد PI بر حسب تعداد ماتریس‌هاي همبستگي
در عملیات قطري‌سازي مشترك [K=۱:۶ و حالت نویز ۵ dB]



شکل۶- شش دسته از نمونه‌هاي ECG ثبت شده از بدن یک مادر



شکل۷- نتايج جداسازي سيگنال‌هاي شکل ۶ با اعمال Experiment#1



شکل۸- نتايج جداسازي سيگنال‌هاي شکل ۶ با اعمال Experiment#2

با توجه به آنكه در مسائل جداسازي كور، هدف به‌دست آوردن تخميني مطلوب از سيگنال‌هاي $\hat{\mathbf{s}}(t)$ است و در برخي از روش‌ها از جمله الگوريتم SOBI و الگوريتم پيشنهادي براي رسيدن به اين هدف ابتدا به تخمين ماتريس تركيب كننده يعني $\hat{\mathbf{A}}$ نياز است در نتيجه دقت و كيفيت در تخمين $\hat{\mathbf{s}}(t)$ كاملاً به دقت و كيفيت در تخمين $\hat{\mathbf{A}}$ بستگي دارد، بنابراين عملكرد اين الگوريتم‌ها به ميزان نزديكي $\mathbf{A}$ به $\hat{\mathbf{A}}$ بستگي دارد كه در حالت ايده‌آل مي‌خواهيم $\hat{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$. براي بررسي نتايج شبيه‌سازي‌ها از معيار عملكرد (PI) به‌صورت زير استفاده مي‌شود:

$$\mathrm{PI}=10.\log_{10}[\frac{1}{\mathrm{G}}\sum_{\mathrm{g}=1}^{\mathrm{G}}\|\hat{\mathbf{A}}^{-1}.\mathbf{A}-\mathbf{I}\|_F^2] \quad (۲۰)$$

كه در آن $\|\cdot\|_F$ نُرم[۱۴] فروبنيوس است.

شکل ۱، ۲۵۰۰ نمونه سيگنال‌هاي ECG مادر، FECG و دو تركيب از آنها را نشان مي‌دهد. شكل ۲، ۲۵۰۰ نمونه سيگنال‌هاي جداسازي و استخراج شده $s_1(t)$ و $s_2(t)$ توسط هر كدام از سري شبيه‌سازي‌هاي Experiment#1 و Experiment#2 را نمايش مي‌دهد. شكل‌هاي ۳ تا ۵، معيار عملكرد PI (dB) را بر حسب تعداد ماتريس‌هاي همبستگي به‌كار گرفته شده در عمليات قطري‌سازي مشترك براي حالت با فرآيند پيش پردازش (Experiment#2) و بدون آن (Experiment#1) به ازاي SNRهاي به ترتيب بدون نويز، ۲dB و ۵dB نشان مي‌دهند. شش دسته از نمونه هاي ECG ثبت شده از بدن يک مادر در شكل ۶ نمايش داده شده‌اند. شكل‌هاي ۷ و ۸ متناظر با Experiment#1 و Experiment#2، نتايج جداسازي سيگنال‌هاي شكل ۶ را نشان مي‌دهند.

تقريباً در تمام شكل‌ها، برتري عملكرد روش پيشنهادي يعني شبيه‌سازي Experiment#2 واضح است. مقايسه قسمت‌هاي (الف) و (ب) شكل ۲ با قسمت‌هاي (ج) و (د) آن، قسمت‌هاي (الف)، (ج) و (ه) شكل ۷ با قسمت‌هاي (الف)، (ب) و (د) شكل ۸؛ و قسمت‌هاي (ب) و (و) شكل ۷ با قسمت‌هاي (ج) و (و) شكل ۸ جداسازي بهتر در Experiment#2 را نشان مي‌دهد. شايان ذكر است كه جابجايي شكل‌ها در ۷ و ۸ به علت يک ويژگي ذاتي الگوريتم‌هاي BSS به نام ابهام جايگشت است [۵]. در شكل‌هاي ۳ تا ۵ ديده مي‌شود كه عملكرد هر دو سري نتايج با افزايش تعداد ماتريس‌هاي همبستگي در عمليات قطري‌سازي مشترك بهبود مي‌يابد. البته وجود يك حد بهبود عملكرد از مقايسه دو حالت K=۵ و K=۶ آشكار مي‌شود. همچنين بهبود عملكرد با افزايش SNR را نشان مي دهند.

۶- نتيجه‌گيري

در اين مقاله روشي براي جداسازي سيگنال‌هاي همبسته FECG و ECG مادر با به‌كارگيري الگوريتم جداسازي كور

[۱۴] Norm

منابع بدون در نظر گرفتن فرض‌هاي خاص استقلال يا ناهمبستگي سيگنال‌هاي منابع معرفي شد.

الگوريتم پيشنهادي بر اساس جداسازي بخش‌هاي همبسته كننده درمنابع با استفاده از اصل تجزيه والد و به‌كارگيري روش جداسازي منابع بر پايه آمارگان‌هاي مرتبه دوم عمل مي كرد. یک بخش مهم الگوريتم مرحله پيش‌پردازش بود كه در آن اطلاعات ناهمبسته بخش قابل پيش‌بيني سيگنال‌هاي منابع استخراج مي‌شد. ساختار قطري ماتريس همبستگي اين اجزاء نقش مهمي در مرحله بعدي الگوريتم يعني استفاده از روش SOBI و تكنيک قطري‌سازي مشترک براي تخمين $\hat{\mathbf{A}}$ و بازآوري سيگنال‌ها داشت. نتايج شبيه‌سازي بر روي داده‌هاي ECG، برتري الگوريتم پيشنهادي را نشان داده است.

مراجع

[1] Fowler R.S., Finlay V.C.D., The electrocardiogram of the neonate, In: The fetal Circulation; 1978: 72-80.

[2] Oostendorp T.; Modeling the fetal ECG; Ph.D. Dissertation, KU Nijmegen, Netherlands; 1989.

[3] Zarzoso V., Nandi A.K., Bacharakis E., Maternal and foetal ECG separation using blind source separation methods; Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology 1997: 14:207-225.

[4] De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J., Fetal electrocardiogram extraction by blind source subspace separation; IEEE Transactions on Biomedical Engineering 2001: 567-572.

[5] Comon P., Jutten C., Herault J., Blind separation of sources, part II: problem statements; Signal Processing 1991: 24:11-20.

[6] Lee T.W., Independent component analysis: theory and applications; Norwell, MA Kluwer Academic; 1998.

[7] Choi S., Cichocki A., Park H.M., Lee S.Y., Blind source separation and independent component analysis: a review; Neural Information Processing 2005: 6:1-57.

[8] Belouchrani A., Abed-Meraim K., Cardoso J.F., Moulines E., A blind source separation technique using second-order statistics; IEEE Transactions on Signal Processing 1997: 45: 434-444.

[9] Cardoso J.F.; Blind signal separation: statistical principles; Proceedings of the IEEE 1998: 86:2009-2025.

[10] Aghabozorgi M.R., Doost-Hoseini A.M., Blind separation of jointly stationary correlated sources; Signal Processing, Elsevier 2004: 84:2:317-325.

[11] Papoulis A., Probability, random variables, and statistic process; McGraw-Hill, Third Ed.; 1991.

[12] Golub G.H., Van Loan C.F., Matrix computations; Baltimore MD: Johns Hopkins University Press; 1989.

[13] Moreau E., A generalization of joint diagonalization criteria for source separation; IEEE Transactions on Signal Processing 2001: 49:530-541.

[14] PhysioNet the research resource for complex physiologic signals; http://www.physionet.org

ضميمه- قطري‌سازي مشترک(JD)

در تحليل عددي "off" يك ماتريس $\mathbf{M}_{n\times n}$ با درايه‌هاي $\mathbf{M}_{ij}$ به‌صورت روبرو تعريف مي‌شود:

$$off(\mathbf{M}) = \sum_{1\le i\neq j\le n} \left|\mathbf{M}_{ij}\right|^2$$

و بر اساس آن قطري كردن يكاني ماتريس M معادل صفر كردن $off(\mathbf{V}^H\mathbf{MV})$ توسط يك ماتريس يكاني V خواهد بود. حال اگر يك ماتريس M داراي فرم تجزيه $\mathbf{M}=\mathbf{UDU}^H$ باشد كه در آن U يكاني و D قطري با عناصر قطري مجزا باشد، آنگاه اين ماتريس فقط به‌وسيله ماتريس‌هاي يكاني كه هم‌ارز U باشند قابل قطري شدن به‌طور يكاني خواهد بود يعني:

$$If \quad off(\mathbf{V}^H\mathbf{MV}) = 0 \quad then \quad \mathbf{V}\approx\mathbf{U}$$

عبارت فوق در واقع توصيف كننده يك "ماتريس قطري كننده يكتا" براي ماتريس M است.

اكنون مجموعه $M=\{\mathbf{M}_1,\ldots,\mathbf{M}_K\}$ شامل K ماتريس با اندازه $n\times n$ را در نظر بگيريد. تابع نامنفي زير بر حسب ماتريس V به‌عنوان معياري براي "قطري بودن مشترك JD" معرفي مي شود:

$$C(\mathbf{M},\mathbf{V}) = \sum_{k=1}^{K} off(\mathbf{V}^H\mathbf{M}_k\mathbf{V})$$

بر اساس تعريف فوق يك ماتريس يكاني "قطري‌كننده مشترك" مجموعه M ناميده مي‌شود اگر آن ماتريس معيار JD فوق را روي مجموعه تمام ماتريس‌هاي يكاني حداقل سازد. كاملاً واضح است كه اگر تمام ماتريس‌هاي داخل مجموعه M به‌شكل $\mathbf{M}_k=\mathbf{UD}_k\mathbf{U}^H$ با $\mathbf{D}_k$ قطري باشند آنگاه $C(\mathbf{M},\mathbf{U})=0$ يعني U معيار JD را به حداقل مقدار ممكن آن مي‌رساند. بنابراين ماتريس يكاني U يك قطري‌ساز مشترك مجموعه خواهد بود.

نكته حائز اهميت در اين مبحث براي روش مورد بررسي يكتايي ماتريس يكاني است كه عمل فوق را بر روي ماتريس‌هاي همبستگي انجام مي‌دهد كه اين مطلب در قضيه اصلي يكتايي قطري‌سازي مشترك بيان شده است.

قضيه - اساس يكتايي قطري‌سازي مشترك [۸]:

مجموعه $M=\{\mathbf{M}_1,\ldots,\mathbf{M}_K\}$ شامل K ماتريس با فرم $\mathbf{M}_k=\mathbf{U}\mathbf{D}_k\mathbf{U}^H$ در نظر بگيريد. در آنها U ماتريس يكاني و $\mathbf{D}_k=diag[e_1(k),\ldots,e_d(k)]$ ماتريس قطري است، هر قطري‌ساز مشترك مجموعهM هم ارز U است اگر و فقط اگر:

$$\forall \quad 1\le i\ne j\le d \;;\; \exists k \;,\; 1\le k\le K \qquad e_i(k)\ne e_j(k)$$

نكته‌اي كه در مورد قضيه فوق لازم به ذكر است عدم الزام در قطري پذير بودن به‌طور يكاني يكتا براي تمام عناصر مجموعه ماتريس‌هاي M است.

نكته مهم ديگر نيزكه بر اساس قضيه فوق و تعريف قطري‌سازي مشترك شايان ذكر است عدم الزام در دقيقاً قطري‌شدن همزمان تمام ماتريس‌هاي مجموعه مورد نظر به‌وسيله يك ماتريس يكاني است حتي قطري شدن يكاني تك تك ماتريس‌هاي مجموعه نيز لازم نيست زيرا بر اساس تعريف و معيار JD صفر شدن off تمام ماتريس‌هاي مجموعه به‌وسيله يك تبديل لازم نيست بلكه فقط حداقل‌سازي معيار كافي خواهد بود.