

A Combined Wavelet Based Mesh Free-Finite Element Method for Solving the Forward Problem in Magnetic Induction Tomography

M. R. Yousefi¹, R. Jafari^{2*}, H. Abrishami Moghaddam³

¹ Ph.D. Student, Faculty of Electrical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran, mr.yousefi@ieec.org

^{2*} Assistant Professor, Faculty of Electrical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

³ Professor, Faculty of Electrical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran, moghadam@eetd.kntu.ac.ir

Abstract

In this paper, a combined wavelet based mesh free method has been presented to solve the forward problem in magnetic induction tomography (MIT). Being a non-contact safe imaging technique, MIT has been an appropriate method for noninvasive industrial and medical imaging. In this imaging method, a primary magnetic field is applied by one or more excitation coils to induce eddy currents in the material to be studied, and then the secondary magnetic field from these eddy currents is detected in sensing coils. Image reconstruction is obtained from estimated electric conductivity coefficients by using measurement data and solutions of forward and inverse problems. In general, the forward problem is solved using finite element method (FEM) with acceptable accuracy but in problems involving moving objects or objects with changing geometrical appearance, mesh distortion is inevitable and susceptible to producing error in numerical results. Since the solution of the FEM depends on the mesh shape and boundary condition constraints are difficult to be applied to the mesh free method, in this paper, the combined wavelet based mesh free approach is suggested to resolve the disadvantages of both methods in the MIT forward problem. In order to apply interface conditions between the two finite element and mesh free sub-domains, slope jump functions are entered to the set of basis functions. The simulation results obtained by the proposed method are compared with the FEM in terms of accuracy and computational cost.

Key words: Magnetic induction tomography, combined wavelet based mesh free-finite element method, wavelet-Galerkin method, forward problem, wavelet method.

* Corresponding author

Address: Faculty of Electrical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Seyedkhandan Bridge, Tehran, Iran. P.O.Box:16315-135., Postal Code:14317-14191, I.R. Iran

Tel: +98 21 84062404

Fax: +98 21 88462066

E-mail: jafari@eetd.kntu.ac.ir

مدل‌سازی اجزای محدود - بدون مش مبتنی بر موجک در حل مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی

محمد رضا یوسفی نجف‌آبادی^۱، رضا جعفری^{۲*}، حمید ابریشمی مقدم^۳

^۱ دانشجوی دکتری، گروه مهندسی پزشکی، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
mr.yousefi@ieee.org

^۲ استادیار، گروه مهندسی پزشکی، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

^۳ استاد، گروه مهندسی پزشکی، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
moghadam@eed.kntu.ac.ir

چکیده

در این مقاله روش اجزای محدود - بدون مش مبتنی بر موجک به منظور حل مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی ارائه شده است. طبیعت بدون تماس و ایمن این فن تصویربرداری، آن را به روشی مناسب برای تصویربرداری پزشکی و صنعتی غیرتهاجمی تبدیل کرده است. در این روش ابتدا با عبور جریانی متناوب از یک یا چند سیم‌پیچ تحریک، میدان مغناطیسی تحریک درون جسم مورد نظر ایجاد شده؛ سپس ولتاژهای القایی در سیم‌پیچ‌های گیرنده اندازه‌گیری می‌شوند. تصویر با تخمین ضرایب هدایت الکتریکی جسم با استفاده از نتایج حاصل از اندازه‌گیری، نتایج حل مسأله پیشرو و حل مسأله معکوس بازسازی می‌شود. شبیه‌سازی مسأله پیشرو به طور معمول با روش اجزای محدود انجام می‌شود؛ اما وابستگی جواب حاصل به مش مورد استفاده، بویژه وقتی که ناحیه هدف شامل اجسام متحرک باشد، محدودیتی برای روش اجزای محدود محسوب می‌شود. در این تحقیق، به منظور رفع مشکل وابستگی به مش‌بندی در روش اجزای محدود و اعمال دقیق‌تر و سریع‌تر شرایط مرزی در روش بدون مش، روش ترکیبی اجزای محدود - بدون مش مبتنی بر موجک برای حل مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی پیشنهاد می‌شود. همچنین برای اعمال شرایط پیوستگی حد فاصل بین دو ناحیه اجزای محدود و بدون مش، توابع پرش شیب به کار گرفته شده‌اند. برای ارزیابی کارایی روش پیشنهادی، نتایج شبیه‌سازی با نتایج بدست آمده از روش اجزای محدود معمول از لحاظ دقت و زمان محاسبات مقایسه شده‌اند.

کلیدواژگان: مقطع‌نگاری القای مغناطیسی، تصویربرداری القای مغناطیسی، روش ترکیبی اجزای محدود - بدون مش، مسأله پیشرو، تقریب موجک.

*عهده‌دار مکاتبات

نشانی: تهران، خیابان شریعتی، قبل از پل سید خندان، دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، آزمایشگاه اندازه‌گیری سیستم‌های بیومدیکال، کدپستی: ۱۴۱۹۱-۱۴۳۱۷

تلفن: ۰۲۱-۸۴۰۶۲۴۰۴، دورنگار: ۰۲۱-۸۸۴۶۲۰۶۶، پیام نگار: jafari@eed.kntu.ac.ir

۱- مقدمه

مقطع‌نگاری امپدانس الکتریکی^۱ روش تصویربرداری غیرتجاهی از توزیع امپدانس درون جسم با استفاده از انرژی دار کردن ناحیه مورد نظر، انجام اندازه‌گیری‌های سطحی از نقاط متفاوت و بازسازی تصویر با به‌کارگیری نتایج حاصل از این اندازه‌گیری‌ها است. در مقطع‌نگاری، کمیت‌های فیزیکی مختلف مواد، امکان اندازه‌گیری‌های متفاوتی را ایجاد می‌کنند که منجر به پیدایش سیستم‌های مقطع‌نگاری متفاوتی می‌شود. از جمله این سیستم‌ها، مقطع‌نگاری مقاومتی الکتریکی^۲، مقطع‌نگاری خازنی الکتریکی^۳ و مقطع‌نگاری القای مغناطیسی^۴ را می‌توان نام برد [۱،۲]. در بین روش‌های مختلف مقطع‌نگاری الکتریکی، امروزه مقطع‌نگاری القای مغناطیسی توجه محققان را به خود جلب کرده است؛ چرا که این روش بر خلاف سایر روش‌های مقطع‌نگاری الکتریکی - که از الکترودهای سطحی برای جمع‌آوری داده‌های اندازه‌گیری استفاده می‌کنند- بر اساس انجام اندازه‌گیری از روی سطح خارجی جسم و بدون تماس الکتریکی با آن عمل می‌کند. مقطع‌نگاری القای مغناطیسی به دو ضریب هدایت الکتریکی و نفوذپذیری مغناطیسی حساس بوده؛ از طریق اندازه‌گیری اندوکتانس‌های متقابل در سیم‌پیچ‌های گیرنده، این ضرایب را استخراج می‌کند و تصویری از سطح مقطع مورد نظر در جسم هدف ایجاد می‌کند [۳]. میدان حس شده در سیم‌پیچ‌های گیرنده، شامل میدان اولیه‌ای ناشی از میدان تحریک اصلی و میدان ثانویه ناشی از جریان‌های گردابی القا شده در درون جسم است [۴]. از مقطع‌نگاری القای مغناطیسی در کاربردهای پزشکی و صنعتی در مواردی که خواص هدایت الکتریکی و نفوذپذیری مغناطیسی اجسام اهمیت دارد، به ویژه پایش طولانی‌مدت^۵ بافت‌های بدن در کاربردهای بالینی، پایش فرایندهای صنعتی، آزمون‌های غیر مخرب^۶ و ژئوفیزیک می‌تواند استفاده شود [۵،۶،۲].

بازسازی تصویر در مقطع‌نگاری القای مغناطیسی همانند سایر روش‌های مقطع‌نگاری شامل دو مرحله حل

مسئله پیشرو^۷ و مسئله معکوس است. مسئله پیشرو با پیدا کردن مجموعه خروجی یکتا با اعمال یک ورودی خاص و پارامترهای فیزیکی معلوم برای جسم هدف و با به‌کارگیری مدل حل مناسب تحلیلی یا عددی تعریف می‌شود. در نقطه مقابل، در مسئله معکوس هدف شناسایی پارامترهای فیزیکی سیستم با داشتن معلومات ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم است. در مسئله معکوس مجموعه کمیت‌های خروجی اندازه‌گیری شده (واقعی) و مدل شده از مسئله پیشرو با یکدیگر مقایسه می‌شوند و سپس با بهینه‌سازی یک تابع خطا، توزیع پارامترها اصلاح شده؛ دوباره می‌توانند در حلقه تکرار به مدل پیشرو وارد شوند تا جایی که اختلاف این دو مجموعه داده، کمینه شود [۲]. با حل مسئله معکوس و مشخص شدن توزیع ضریب هدایت الکتریکی، تصویر سطح مقطع مورد نظر بازسازی می‌شود. از نظر ریاضی مسئله معکوس، مسئله‌ای بد وضع^۸ است؛ زیرا تعداد اندازه‌گیری‌ها محدود است و بروز خطای کوچکی در شبیه‌سازی ولتاژهای اندازه‌گیری شده، می‌تواند باعث ایجاد تغییرات بزرگ در توزیع ضریب‌های فیزیکی بدست آمده شود. بنابراین اولین و مهم‌ترین گام در حل مسئله معکوس، ارائه مدلی دقیق از مسئله پیشرو است [۷].

مسئله پیشرو شامل شبیه‌سازی میدان‌های حاصل از سیم‌پیچ‌های تحریک و جریان‌های گردابی جاری شده در درون جسم هدف و محاسبه ولتاژ اندازه‌گیری شده از سیم‌پیچ‌های گیرنده به عنوان تابعی از ضریب‌های هدایت الکتریکی و مغناطیسی جسم هدف است. برای این منظور باید مدل مناسبی برای مسئله پیشرو انتخاب، و آن را با روش‌های موجود حل کرد که این روش‌ها شامل روش‌های تحلیلی و عددی می‌شوند. به دلیل پیچیدگی زیاد مقطع‌های مورد تصویربرداری، روش‌های تحلیلی قادر به ارائه پاسخ مناسب نیستند و باید به روش‌های عددی که توانایی مدل‌سازی محیط‌های غیر خطی با اشکال هندسی و مرزهای پیچیده را داشته باشند، رجوع کرد. روش اجزای محدود، از روش‌های مناسب برای

^۱Electrical Impedance Tomography (EIT)^۲Electrical Resistivity Tomography (ERT)^۳Electrical Capacitance Tomography (ECT)^۴Magnetic induction tomography (MIT)^۵Monitoring Long Term^۶Nondestructive Testing^۷Forward^۸Ill-posed

ناپایداری در محاسبه عددی آن‌ها اجتناب‌ناپذیر است [۲۶-۲۸]. بدین ترتیب برای پیاده‌سازی روش مرسوم گالرکین مبتنی بر موجک و محاسبه مقادیرهای دقیق ضرایب اتصال، به به‌کارگیری الگوریتم‌های خاصی نظیر آنچه در مراجع [۲۹،۳۰] ارائه شده است، نیاز داریم. علاوه بر این، روش‌های ساده‌شده‌ای در منابع [۲۱،۲۷] پیشنهاد شده‌اند که در آن‌ها از مشتق مرتبه اول توابع پایه موجک برای محاسبه ماتریس سختی استفاده شده است. این موضوع مشکل بروز ناپایداری در محاسبه ضرایب اتصال را برطرف کرده؛ پیاده‌سازی عددی روش گالرکین مبتنی بر موجک را امکان‌پذیر می‌کند.

در سوی دیگر به دلیل صفر بودن مقدار توابع پایه موجک در مرزهای ناحیه مورد حل، اعمال شرایط مرزی در روش گالرکین مبتنی بر موجک به راحتی امکان‌پذیر نخواهد بود. ابتدا ایده اعمال شرایط مرزی متناوب به کمک تکرار متناوب توابع پایه دوره محدود موجک در کل بازه حل مطرح شد [۱۸،۱۹،۳۱]؛ اما کاربردهای این روش، به دلیل نیازمندی به تعریف شرایط مرزی متناوب، بسیار محدود است. پس از آن برای رفع این مشکل، روش ناحیه مجازی^{۱۴} پیشنهاد شد [۲۰-۲۳،۳۲،۳۳]. در این روش ناحیه حل به صورت مجازی به ناحیه‌ای بزرگ‌تر با شرایط مرزی متناوب گسترش می‌یابد و شرایط مرزی واقعی از طریق اعمال مجموعه‌ای شرایط متناوب متناسب، اعمال می‌شوند [۲۰،۳۲]؛ اما این روش نیز دارای محدودیت‌هایی از جمله بد وضع بودن ماتریس سختی، افزایش حجم محاسبات به دلیل گسترش ناحیه حل به ناحیه‌ای بزرگ‌تر و همچنین نوسان تقریب بدست آمده در نزدیک مرزها است [۲۰،۳۲،۳۳]. در روشی دیگر، شرایط مرزی در یک مش اجزای محدود به کمک جایگزینی توابع چند جمله‌ای مرسوم روش اجزای محدود با توابع پایه موجک، اعمال شده‌اند [۳۴-۳۷]. همچنین الگوریتم‌هایی برای محاسبه ضرایب اتصال درون اجزا برای به‌کارگیری در این روش معرفی شده‌اند [۲۶،۳۶،۳۸]. در این روش شرایط مرزی با دقت زیاد و به سادگی قابل اعمال هستند ولی در عوض

حل مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی است [۸-۱۱]؛ اما در کاربردهایی که جسم در حال تغییر شکل است، مثل نواحی متحرک داخل بدن، به دلیل وابستگی نتایج روش اجزای محدود به شکل و اندازه مش، نتایج این روش با خطا همراه خواهد بود [۱۲-۱۶]. در این کاربردها، روش‌های بدون مش به دلیل عدم وابستگی به مش موفق‌تر عمل می‌کنند [۱۳،۱۶]. تا کنون روش‌های بدون مش متفاوتی برای حل مسائل میدان پیشنهاد شده‌اند که دو روش گالرکین بدون مش^۹ [۱۳،۱۷] و گالرکین مبتنی بر موجک^{۱۰} [۱۵،۱۶،۱۸-۲۵] از معروف‌ترین آن‌ها هستند. روش گالرکین بدون مش مبتنی بر تقریب حداقل مربعات متحرک^{۱۱} است و به تعریف تعدادی گره در ناحیه حل نیاز دارد؛ بنابراین در این روش از مشکلات ناشی از مش‌بندی در روش اجزای محدود اجتناب می‌شود [۱۳،۱۷]. با وجود این، به دلیل اینکه در پیاده‌سازی عددی این روش ناچار به محاسبه انتگرال توابع پایه حول گره‌های تعریف شده در ناحیه حل هستیم، جابه‌جایی این گره‌ها در اجسام دارای هندسه تغییرپذیر با زمان، می‌تواند باعث ایجاد خطا در نتایج حل مسأله پیشرو شود [۱۵،۱۶].

در دسته دوم روش گالرکین مبتنی بر موجک قرار می‌گیرد. در این روش بر خلاف روش گالرکین بدون مش، تعریف توابع پایه وابسته به محل جایگذاری گره‌ها نیست و این توابع در کل ناحیه انتخاب می‌شوند. مسلماً مزیت این روش، عدم وابستگی تابع‌های پایه به تعداد و نحوه توزیع گره‌ها در ناحیه مورد حل و در نتیجه جلوگیری از بروز خطای ناشی از جابه‌جایی گره‌ها است [۱۵،۱۶]. روش گالرکین مبتنی بر موجک بر پایه محاسبه انتگرال‌هایی متشکل از حاصل ضرب توابع پایه و مشتق‌های آن‌ها در ناحیه حل بنا شده است، که به نام ضرایب اتصال^{۱۲} شناخته می‌شوند. این ضرایب تشکیل‌دهنده ماتریس سختی روش گالرکین مبتنی بر موجک هستند؛ اما از آنجا که مشتق‌های مرتبه بالای موجک‌های دوره محدود^{۱۳} به شدت نوسانی هستند، بروز تغییرات شدید در ضرایب اتصال و در نتیجه

⁹Element Free Galerkin Method
¹²Connection Coefficients

¹⁰Wavelet Galerkin Method
¹³Compactly Support

¹¹Moving Least Square Approximation
¹⁴Fictitious Domains Method

محدود و بدون مش، روابط روش گالرکین مبتنی بر موجک و اجزای محدود با ساختاری مشابه از طریق روش بهینه‌سازی گالرکین استخراج شده؛ سپس روابط مورد نیاز برای ترکیب دو حل اجزای محدود و گالرکین مبتنی بر موجک پایه‌گذاری می‌شوند. پس از آن، در بخش ۴ نحوه تولید مجموعه توابع پایه مقیاس موجک دو بعدی به طور مختصر شرح داده خواهد شد. همچنین در این بخش به چگونگی اعمال شرایط حد واسط بین دو ناحیه با استفاده از اضافه کردن توابع پرش شیب به مجموعه توابع پایه نیز توجه خواهد شد. در نهایت با هدف ارزیابی کارایی روش پیشنهادی در حل مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی، یک سیستم مقطع‌نگار القای مغناطیسی ۸ سیم‌پیچ در نظر گرفته شده؛ نتایج شبیه‌سازی حاصل از روش پیشنهادی با نتایج بدست آمده از روش اجزای محدود معمول از لحاظ دقت و زمان محاسبات مقایسه خواهند شد.

۲- معادله حاکم بر سیستم

برای دستیابی به معادله دیفرانسیل مدل‌کننده میدان الکترومغناطیس ناشی از اعمال میدان متناوب تحریک و محاسبه ولتاژهای القایی در سیم‌پیچ‌های گیرنده در مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی، می‌توان از بیان معادلات ماکسول در محیط غیر همگن در حوزه فرکانس استفاده کرد. با استفاده از این معادلات، می‌توان جریان‌های گردابی جاری شده در درون جسم هدف را به وسیله معادله دیفرانسیل زیر در حالت کلی مدل‌سازی کرد [۴۳، ۴۴]:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = -j\omega\sigma\vec{A} + \vec{J}_s \quad (1)$$

μ ضریب نفوذپذیری مغناطیسی، σ ضریب هدایت الکتریکی، ω فرکانس زاویه‌ای، \vec{A} بردار پتانسیل مغناطیسی و \vec{J}_s چگالی جریان تحریک هستند. از آنجایی که مدل‌سازی جریان‌های گردابی و سیم‌پیچ‌های تحریک در فضای سه بعدی به انجام محاسباتی پیچیده نیاز دارد

خواص روش بدون مش کم‌رنگ شده؛ تقریب ایجاد شده به شکل و اندازه زیر ناحیه‌های ایجاد شده وابسته است. اخیراً نیز استفاده از توابع پرش^{۱۵} چندجمله‌ای [۱۵، ۲۴، ۲۵، ۲۷] و شیب [۱۶] برای اعمال شرایط مرزی و حد واسط^{۱۶} در روش گالرکین مبتنی بر موجک پیشنهاد شده است. با به‌کارگیری این روش، در عین حفظ عدم وابستگی حل به مش‌بندی، شرایط مرزی و حد واسط با دقت قابل قبولی اعمال می‌شوند.

بمنظور حل مشکل بازده کم روش‌های بدون مش در اعمال شرایط مرزی از یک سو و مشکل روش اجزای محدود برای مدل‌سازی نواحی دینامیک و دارای هندسه متغیر با زمان از سوی دیگر، تا کنون ایده‌های متفاوتی برای ترکیب روش‌های اجزای مرزی و بدون مش، شبیه استفاده از روش‌های ترکیبی اجزای محدود و بدون مش گالرکین برای مدل‌سازی ارتعاشات صفحه‌های فلزی [۳۹، ۴۰]، مدل‌سازی و محاسبه میدان‌های الکترومغناطیس [۱۳، ۴۱، ۴۲] و حل مسأله پیشرو مقطع‌نگاری الکتریکی [۱۶، ۲۴، ۲۵] مطرح شده است. همچنین از ترکیب روش‌های اجزای محدود و گالرکین مبتنی بر موجک برای مدل‌سازی میدان‌های الکترومغناطیسی در ماشین‌های الکتریکی و مبدل‌های الکترومکانیک نیز استفاده شده است [۱۵، ۲۷]. در اکثر این کاربردها، به دلیل عملکرد سریع و دقیق روش اجزای محدود در اعمال شرایط مرزی و همچنین عدم وابستگی روش بدون مش به اندازه و شکل اجزا، ناحیه حل به دو قسمت تقسیم شده؛ روش اجزای محدود برای نواحی کناری تحت سلطه شرایط مرزی و روش بدون مش برای نواحی مرکزی و دینامیک ناحیه مورد حل بکارگرفته شده است. در این مقاله، روش ترکیبی اجزای محدود - بدون مش مبتنی بر موجک با به‌کارگیری توابع پرش شیب برای اتصال دو ناحیه به یکدیگر، با هدف حل مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی پیشنهاد شده است. برای این منظور، ابتدا در بخش ۲ معادلات حاکم بر سیستم‌های مقطع‌نگاری القای مغناطیسی بیان می‌شود. در بخش ۳ پس از بررسی نحوه ترکیب دو ناحیه اجزای

¹⁵Jump Functions

¹⁶Interface Condition

(۵) - که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی^{۱۸} از نوع هلمهلتز^{۱۹} است- در درون ناحیه هدف محاسبه شوند. در حالت کلی معادله هلمهلتز را می توان به شکل زیر نمایش داد:

$$-\nabla \cdot (\alpha(x, y) \nabla u(x, y)) + \beta u(x, y) = f(x, y) \quad (۷)$$

که در آن $\alpha(x, y)$ و $\beta(x, y)$ معرف پارامترهای فیزیکی محیط و $f(x, y)$ تابع تحریک، هر سه تابعی از مکان هستند. با مقایسه این معادله با رابطه (۵)، پارامترهای فیزیکی محیطی مورد حل $\alpha(x, y) = 1/\mu(x, y)$ ، $\beta(x, y) = j\omega\sigma(x, y)$ و تابع تحریک به صورت $f(x, y) = J_{sz}(x, y)$ تعریف می شوند. متغیر مجهول $u(x, y)$ نیز معادل بردار پتانسیل مغناطیسی در راستای محور Z (A_z) است. با هدف پیدا کردن جواب یکتا برای معادله فوق، شرط مرزی ترکیبی رابین^{۲۰} (حالت کلی در برگزیده شروط مرزی نیومن^{۲۱} و دیریشله^{۲۲}) بر روی مرز ناحیه هدف به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\alpha(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial \hat{n}} \cdot \hat{n} + \gamma u(x, y) = q \quad \text{on } \partial\Omega \quad (۸)$$

که در آن، $\partial\Omega$ مرز در برگزیده ناحیه Ω و \hat{n} بردار یکه عمود بر جزء مرز و به سمت خارج است. γ و q نیز پارامترهای فیزیکی مرز مورد نظر هستند. با هدف مدل سازی به روش ترکیبی اجزای محدود - بدون مش مبتنی بر موجک، مطابق با الگوریتم ارائه شده در [۱۴-۱۶] ناحیه هدف می تواند به دو قسمت اجزای محدود و بدون مش تقسیم شود. روش بدون مش برای قسمت های متحرک یا دارای هندسه متغیر با زمان مناسب است. روش اجزای محدود نیز به دلیل بازده بیشتر در اعمال شرایط مرزی در مقایسه با روش بدون مش، در نواحی تحت سلطه شرایط مرزی به کار گرفته می شود. در ادامه پس از به کارگیری روش بهینه سازی گالرکین برای فرمول بندی دو روش گالرکین مبتنی بر موجک و اجزای محدود در حالت دوبعدی و ایجاد دستگاه های ماتریسی مشابه برای دو روش، روابط مورد نیاز برای ترکیب دو حل اجزای محدود و گالرکین مبتنی بر موجک در دستگاه ماتریس واحد پایه گذاری می شوند.

و باعث محدود شدن سرعت تصویربرداری می شود، با انجام ساده سازی، بردار پتانسیل مغناطیسی \bar{A} و چگالی جریان \bar{J}_s در راستای محور Z بدون تغییر فرض می شوند. بنابراین در حالت دو بعدی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times A_z \hat{a}_z = -j\omega\sigma A_z \hat{a}_z + J_{sz} \hat{a}_z \quad (۲)$$

در این رابطه $A_z \hat{a}_z$ بردار پتانسیل مغناطیسی در راستای محور Z و $J_{sz} \hat{a}_z$ چگالی جریان تحریک در جهت محور Z است. حال با استفاده از قضیه $\nabla \times \nabla \times \bar{f} = \nabla \nabla \cdot \bar{f} - \nabla^2 \bar{f}$ که در مرجع [۴۵] بیان شده است، در حالت دو بعدی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\mu} (\nabla \nabla \cdot A_z \hat{a}_z - \nabla^2 A_z \hat{a}_z) = -j\omega\sigma A_z \hat{a}_z + J_{sz} \hat{a}_z \quad (۳)$$

از طرف دیگر با استفاده از شرط کولمب^{۱۷} بصورت $\nabla \cdot A_z = 0$ خواهیم داشت [۱۱]:

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 A_z \hat{a}_z = -j\omega\sigma A_z \hat{a}_z + J_{sz} \hat{a}_z \quad (۴)$$

در نهایت معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم مقطع نگاری القای مغناطیسی در حالت دو بعدی به شکل زیر بدست می آید که باید با مسأله پیشرو جواب های این معادله درون ناحیه هدف محاسبه گردد:

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A_z - j\omega\sigma A_z = -J_{sz} \quad (۵)$$

از آنجایی که خروجی های مسأله پیشرو، ولتاژهای القایی در سیم پیچ های گیرنده هستند؛ این ولتاژها باید شبیه سازی شوند. محاسبه این ولتاژها با بهره گیری از قانون القای فاراده به شکل زیر امکان پذیر است [۴۶، ۴۷]:

$$V_{ind} = -\oint_c E \cdot dl = -j\omega \oint_c A_z \cdot dl \quad (۶)$$

E شدت میدان الکتریکی عبوری از داخل سیم پیچ و c مسیر بسته شده توسط سیم پیچ است.

۳- روش ترکیبی اجزای محدود - بدون مش

مبتنی بر موجک

برای حل مسأله پیشرو مقطع نگاری القای مغناطیسی در حالت دوبعدی با روش ترکیبی اجزای محدود - بدون مش باید جواب های معادله دیفرانسیل بیان شده در رابطه

¹⁷Coulomb Gauge
²⁰Robin

¹⁸Partial Differential Equations (PDE)
²¹Neumann

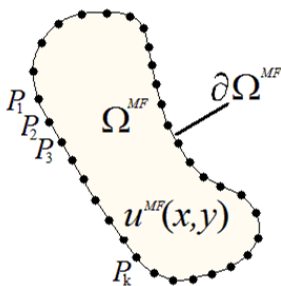
¹⁹Helmholtz
²²Dirichlet

$$\Pi_1 = - \int_{\partial\Omega^{MF}} [\alpha(x, y) \nabla u^{MF}(x, y) \phi_i(x, y)] \hat{n} ds + \iint_{\Omega^{MF}} \alpha(x, y) \nabla u^{MF}(x, y) \cdot \nabla \phi_i(x, y) dx dy \quad (13)$$

که جزء مرزی قرار گرفته بر روی مرز ناحیه بدون مش $(\partial\Omega^{MF})$ است. حال اگر مرز $\partial\Omega^{MF}$ با تعداد BP نقطه مرزی گسسته شود [شکل (۱)], با به‌کارگیری جمع ریمان^{۲۲} و همچنین جایگزینی بسط (۹) در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\Pi_1 = \sum_{k=1}^{BP-1} \phi_i(P_k) \lambda^k + \iint_{\Omega^{MF}} \alpha(x, y) \nabla \left(\sum_{j=1}^M c_j \phi_j(x, y) \right) \cdot \nabla \phi_i(x, y) dx dy \quad (14)$$

در این رابطه، $P_k (k=1, 2, 3, \dots, BP)$ مختصات نقطه k -ام قرار گرفته بر روی مرز $\partial\Omega^{MF}$ ، λ^k فاصله بین دو نقطه P_k و P_{k+1} و λ^k ضریب لاگرانژ^{۲۳} متناظر با قسمت k -ام است. این ضرایب لاگرانژ مجهول با اعمال شرایط مرزی محاسبه می‌شوند [۵۰، ۵۱]. مسلماً هر اندازه BP بزرگ‌تر باشد فاصله بین نقاط مرزی در نظر گرفته شده، کمتر، و اعمال شرایط مرزی با دقت بیشتری امکان‌پذیر خواهد بود. البته افزایش بیش از حد BP بد وضعی دستگاه معادلات را نیز به دنبال خواهد داشت.



شکل (۱) - گسسته‌سازی مرز ناحیه بدون مش در اعمال شرایط مرزی.

در سوی دیگر، با جایگزینی بسط (۹) در جمله Π_2 خواهیم داشت:

$$\Pi_2 = \sum_{j=1}^M c_j \iint_{\Omega^{MF}} \beta(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dx dy \quad (15)$$

۳-۱- روش گالرکین مبتنی بر موجک

اولین قدم برای حل مسأله پیشرو در ناحیه بدون مش (Ω^{MF}) ، بیان تابع مجهول $u^{MF}(x, y)$ به صورت ترکیبی خطی از مجموعه تابع‌های پایه مستقل خطی است [۴۸]:

$$u^{MF}(x, y) = \sum_{j=1}^M c_j \phi_j(x, y) \quad (9)$$

در این رابطه، $\phi_j(x, y)$ توابع پایه دوبعدی، M تعداد توابع پایه و c_j ضرایب‌های مجهول هستند. پس از بدست آمدن این ضرایب‌های مجهول، می‌توان مقدار پتانسیل مجهول در هر نقطه از ناحیه بدون مش را با استفاده از بسط فوق به صورت یکتا محاسبه کرد. بنابراین، هدف استفاده از روش بهینه‌سازی گالرکین برای دستیابی به دستگاه معادلاتی برای محاسبه ضرایب‌های مجهول c_j است. روش بهینه‌سازی گالرکین، از دسته روش‌های باقی‌مانده وزن‌دار است که در آن ضریب وزنی باقی‌مانده‌ها، همان توابع پایه انتخاب می‌شوند. با تصویر دو طرف معادله (۷) بر تابع پایه $\phi_i(x, y)$ به عنوان تابع وزن، خواهیم داشت [۴۹]:

$$\underbrace{\iint_{\Omega^{MF}} -\nabla \cdot [\alpha(x, y) \nabla u^{MF}(x, y)] \phi_i(x, y) dx dy}_{\Pi_1} + \underbrace{\iint_{\Omega^{MF}} \beta(x, y) u^{MF}(x, y) \phi_i(x, y) dx dy}_{\Pi_2} = \iint_{\Omega^{MF}} f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy \quad (10)$$

حال برای ساده‌سازی جمله Π_1 از رابطه برداری زیر بهره می‌گیریم [۴۵]:

$$\nabla \cdot [\phi_i(x, y) (\alpha(x, y) \nabla u^{MF}(x, y))] = \phi_i(x, y) \nabla \cdot [\alpha(x, y) \nabla u^{MF}(x, y)] + \alpha(x, y) \nabla u^{MF}(x, y) \cdot \nabla \phi_i(x, y) \quad (11)$$

بدین ترتیب، جمله Π_1 به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\Pi_1 = - \iint_{\Omega^{MF}} \nabla \cdot [\alpha(x, y) \nabla u^{MF}(x, y) \phi_i(x, y)] dx dy + \iint_{\Omega^{MF}} \alpha(x, y) \nabla u^{MF}(x, y) \cdot \nabla \phi_i(x, y) dx dy \quad (12)$$

سپس با استفاده از قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

²²Riemann Sum

²³Lagrange Multiplier

بردارهای مجهول g^{MF} و λ^{MF} نیز به ترتیب بردارهای ضریب‌های توابع پایه و لاگرانژ هستند:

$$g^{MF} = [c_1 \quad \dots \quad c_M]^T$$

$$\lambda^{MF} = [\lambda^1 \quad \dots \quad \lambda^{BP-1}]^T$$

پس از حل این دستگاه معادلات و محاسبه ضرایب مجهول c_j می‌توان مقدار تابع دوبعدی مجهول u را در هر نقطه از ناحیه بدون مش با به‌کارگیری بسط (۹) بدست آورد.

۳-۲- روش اجزای محدود

بمنظور حل معادله هلمهلتز دو بعدی بیان شده در رابطه (۷) در ناحیه اجزای محدود (Ω^{FE}) ، می‌توان از هر یک از دو روش بهینه‌سازی ریتز^{۲۴} یا گالرکین برای فرمول‌بندی روش اجزای محدود بهره برد. با وجود این، برای ایجاد دستگاهی ماتریسی با ظاهر مشابه دستگاه بدست آمده در روش گالرکین مبتنی بر موجک، از روش بهینه‌سازی گالرکین برای استخراج زیر ماتریس‌های اجزای محدود استفاده می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا ناحیه اجزای محدود با به‌کارگیری تعدادی جزء، تقسیم‌بندی می‌شود. سپس برای هر جزء، عددی منحصر به فرد اختصاص می‌یابد. گره‌های هر جزء خود نیز به صورت محلی^{۲۵} شماره‌گذاری می‌شوند. شماره‌گذاری منحصر به فرد برای هر گره در کل دامنه، شماره‌گذاری سراسری^{۲۶} نامیده می‌شود. تغییرات متغیر مجهول، در طول یک جزء با انتخاب مناسب توابع پایه، تقریب زده می‌شود. در روش اجزای محدود معمولاً از توابع چند جمله‌ای به عنوان توابع پایه استفاده می‌شود؛ چرا که مشتق و انتگرال این گونه توابع در مقایسه با توابع دیگر، به آسانی قابل محاسبه است. در حالت دو بعدی با فرض اجزای مثلثی برای جزءبندی ناحیه Ω^{FE} ، تغییرات متغیر مجهول $u^{FE}(x, y)$ در داخل جزء e -ام می‌تواند با تابعی خطی به شکل زیر تقریب زده شود [۴۵]:

$$u^e(x, y) = a_1^e + a_2^e x + a_3^e y \quad (18)$$

حال با محاسبه ضرایب مجهول a_1^e ، a_2^e و a_3^e بر حسب مقدار پتانسیل مجهول در گره‌های هر جزء و جایگذاری

و در نهایت با جایگزینی روابط (۱۴) و (۱۵) در رابطه (۱۰)، این رابطه به ازای هر تابع پایه به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\sum_{j=1}^M k_{i,j} c_j + \sum_{k=1}^{BP-1} \phi_i(P_k) \lambda_k = F_i$$

$$k_{i,j} = \iint_{\Omega^{MF}} \alpha(x, y) \nabla \phi_j(x, y) \cdot \nabla \phi_i(x, y) dx dy$$

$$+ \iint_{\Omega^{MF}} \beta(x, y) \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) dx dy$$

$$F_i = \iint_{\Omega^{MF}} f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy$$

حال برای دستیابی به یک دستگاه معادلات به منظور تعیین ضریب‌های مجهول با در نظر گرفتن رابطه (۱۶) برای تمام توابع پایه $(i=1, 2, 3, \dots, M)$ ، رابطه ماتریسی زیر قابل دستیابی خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} K^{MF} & H_v^{MF} \\ H_u^{MF} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{MF} \\ \lambda^{MF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{MF} \\ q^{MF} \end{bmatrix} \quad (17)$$

در این رابطه K^{MF} و F^{MF} به ترتیب ماتریس سختی و بردار تحریک هستند که درایه‌های آن‌ها در رابطه (۱۶) تعریف شده‌اند. ماتریس‌های H_u^{MF} و H_v^{MF} نیز برای اعمال شرایط مرزی بکار گرفته می‌شوند. با در نظر گرفتن شرط مرزی رابین تعریف شده در رابطه (۸) برای BP قسمت مرزی و با توجه به رابطه (۱۴)، این ماتریس‌ها به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$H_v^{MF} = \begin{bmatrix} \phi_1(P_1) & \dots & \phi_1(P_{BP-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_M(P_1) & \dots & \phi_M(P_{BP-1}) \end{bmatrix}_{M \times (BP-1)}$$

$$H_u^{MF} = \begin{bmatrix} \gamma^1 \phi_1(P_1) + \alpha_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{n}} \cdot \hat{n} \Big|_{P_1} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^{BP-1} \phi_1(P_{BP-1}) + \alpha_{BP-1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{n}} \cdot \hat{n} \Big|_{P_{BP-1}} & \dots & \dots \\ \gamma^1 \phi_M(P_1) + \alpha_1 \frac{\partial \phi_M}{\partial \hat{n}} \cdot \hat{n} \Big|_{P_1} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^{BP-1} \phi_M(P_{BP-1}) + \alpha_{BP-1} \frac{\partial \phi_M}{\partial \hat{n}} \cdot \hat{n} \Big|_{P_{BP-1}} & \dots & \dots \end{bmatrix}_{(BP-1) \times M}$$

بردار q^{MF} تعیین‌کننده مقدار شرط مرزی در این قسمت‌های مرزی است:

$$q^{MF} = [q^1 \quad \dots \quad q^{BP-1}]^T$$

$$g_i^e = \int_{\Gamma^e} N_i^e(x, y) D \cdot \hat{n}^e d\Gamma \quad \text{for } i=1, 2, 3$$

$$\{u^e\} = \{u_1^e \quad u_2^e \quad u_3^e\}^T$$

اکنون با گسترش این رابطه برای تمام N جزء

تشکیل دهنده ناحیه Ω^{FE} مشابه روش ریتز، می‌توان به رابطه ماتریسی زیر رسید:

$$\{R\} = \sum_{e=1}^N \{\bar{R}^e\} = \quad (23)$$

$$\sum_{e=1}^N (\{K^e\} \{u^e\} - \{F^e\} - \{g^e\}) = \{0\}$$

این دستگاه معادلات به شکل زیر نیز قابل بیان است:

$$[K^{FE}] [u^{FE}] + [g^{FE}] = [F^{FE}] \quad (24)$$

در این رابطه K^{FE} و F^{FE} به ترتیب ماتریس سختی و بردار تحریک هستند. u^{FE} نیز بیانگر تغییرات $u^{FE}(x, y)$ بر روی گره‌های ناحیه اجزای محدود است. درایه‌های بردار g^{FE} نیز فقط برای قسمت‌های مرزی رابین مقدار دارند و برای مرزهای نیومن همگن (صفر) و دیریشله برابر صفر هستند. درایه‌های این بردار برای گره i -ام که بر روی قسمت s -ام مرز $\partial\Omega^{FE}$ با شرط رابین قرار گرفته است، با رابطه زیر قابل محاسبه هستند [۴۵]:

$$g_i = - \int_{\Gamma^s} N_j^e D \cdot \hat{n} d\Gamma - \int_{\Gamma^{s+1}} N_j^e D \cdot \hat{n} d\Gamma \quad (25)$$

در این رابطه، Γ^s و Γ^{s+1} دو قسمت مرزی متصل به گره مرزی i -ام هستند. j شماره گره محلی در جزء e و معادل با شماره گره سراسری i است. N_j^e نیز به طور خطی از مقدار یک در گره i -ام تا مقدار صفر در دو گره دیگر جزء e تغییر می‌کند. در نتیجه با هنجارسازی دو قسمت مرزی Γ^s و Γ^{s+1} ، و استفاده از تعویض متغیر $d\Gamma = l^s d\varepsilon$ خواهیم داشت:

$$g_i = - \int_0^1 \varepsilon D \cdot \hat{n} l^s d\varepsilon - \int_0^1 (1 - \varepsilon) D \cdot \hat{n} l^{s+1} d\varepsilon \quad (26)$$

در این رابطه l^s طول قسمت Γ^s و l^{s+1} طول قسمت Γ^{s+1} است. حال شبیه به فرمول‌بندی ارائه شده در روش گالریکین مبتنی بر موجک، با استفاده از تعریف ضریب لاگرانژ برای قسمت s -ام به شکل:

$$\lambda^s = [-\alpha^e \nabla u^e(x, y) \cdot \hat{n}]^s \quad (27)$$

رابطه (۲۶) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

آن‌ها در بسط (۱۸)، تغییرات متغیر مجهول $u^e(x, y)$ در داخل هر جزء با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$u^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x, y) u_j^e \quad (19)$$

در این رابطه u_j^e مقدار پتانسیل مجهول بر روی گره j -ام جزء e و N_j^e تابع پایه درون‌یاب متناظر با این گره است. بدین ترتیب و با انتخاب این توابع پایه به عنوان وزن باقی‌مانده معادله بیان شده در رابطه (۷)، باقی‌مانده وزن‌دار شده در هر جزء با فرض ثابت بودن ثابت‌های فیزیکی در آن جزء، از طریق رابطه زیر قابل دستیابی است:

$$R_i^e(u^e) = \iint_{\Omega^e} \left\{ \alpha^e \frac{\partial N_i^e(x, y)}{\partial x} \frac{\partial u^e(x, y)}{\partial x} + \alpha^e \frac{\partial N_i^e(x, y)}{\partial y} \frac{\partial u^e(x, y)}{\partial y} + \beta^e N_i^e(x, y) u^e(x, y) \right\} dx dy \quad (20)$$

$$- \iint_{\Omega^e} N_i^e(x, y) f^e dx dy - \int_{\Gamma^e} N_i^e(x, y) D \cdot \hat{n}^e d\Gamma \quad \text{for } i=1, 2, 3$$

که در این رابطه Γ^e مرز خارجی ناحیه Ω^e و \hat{n}^e بردار **نرمال** عمود بر Γ^e به طرف بیرون است. D نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \alpha^e \nabla u^e(x, y) \quad (21)$$

حال با جایگذاری بسط (۱۹) در رابطه (۲۰) برای هر جزء، این رابطه می‌تواند به شکل ماتریسی زیر بیان شود:

$$\{R^e\} = [K^e] \{u^e\} - \{F^e\} - \{g^e\}$$

$$k_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \left\{ \alpha^e \frac{\partial N_i^e(x, y)}{\partial x} \frac{\partial N_j^e(x, y)}{\partial x} + \alpha^e \frac{\partial N_i^e(x, y)}{\partial y} \frac{\partial N_j^e(x, y)}{\partial y} + \beta^e N_i^e(x, y) N_j^e(x, y) \right\} dx dy \quad (22)$$

$$\text{for } i, j = 1, 2, 3$$

$$F_i^e = \iint_{\Omega^e} N_i^e f^e dx dy \quad \text{for } i=1, 2, 3$$

$$I^{FE} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{l^{BS}} \end{bmatrix}_{BS \times BS}$$

همچنین، بردار معلوم q^{FE} تعیین کننده مقدار شرط مرزی و بردار مجهول λ^{FE} بیان کننده ضریب‌های لاگرانژ در BP قسمت مرزی است:

$$q^{FE} = [q^1 \quad \dots \quad q^{BS}]^T$$

$$\lambda^{FE} = [\lambda^1 \quad \dots \quad \lambda^{BS}]^T$$

در نهایت، شرایط مرزی دیریشله می‌توانند بصورت مستقیم همانند روش ریتز در K^{FE} و F^{FE} اعمال شوند.

۳-۳- ترکیب دو روش گالرکین مبتنی بر موجک و

اجزای محدود

به منظور ترکیب دو دستگاه معادلات حاصل از روش‌های گالرکین مبتنی بر موجک و اجزای محدود و دستیابی به حلی واضح در کل ناحیه هدف، شرط پیوستگی برابری مقادیر بردار پتانسیل مغناطیسی و مشتق آن (ضریب لاگرانژ) در مرز مشترک دو ناحیه ($\partial\Omega^C$) باید تحقق یابد [۱۴]:

$$u^{MF}(x_h, y_h) = u^{FE}(x_h, y_h) \quad (31)$$

$$\lambda^h = \lambda^k = -\lambda^s \quad (32)$$

λ^h ضریب لاگرانژ مفروض متناظر با h -امین گره مشترک قرار گرفته بر مرز مشترک دو ناحیه بدون مش و اجزای محدود ($\partial\Omega^C$) با مختصات (x_h, y_h) است. این گره مشترک معادل گره مرزی k -ام در ناحیه بدون مش است و از سوی دیگر به قسمت s -ام در ناحیه اجزای محدود نیز متصل است. λ^k و λ^s همان ضرایب لاگرانژ تعریف شده در روابط (۱۴) و (۲۷) هستند. در نهایت با ترکیب مجموعه روابط (۱۷) و (۳۰) به یک دستگاه معادلات جامع به شکل زیر دست می‌یابیم [۱۴]:

$$\begin{bmatrix} K^{FE} & 0 & H_v^{FE} & 0 & G_v^{FE} \\ 0 & K^{MF} & 0 & H_v^{MF} & G_v^{MF} \\ H_u^{FE} & 0 & I^{FE} & 0 & 0 \\ 0 & H_u^{MF} & 0 & 0 & 0 \\ G_u^{FE} & G_u^{MF} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^{FE} \\ q^{MF} \\ \lambda^{FE} \\ \lambda^{MF} \\ \lambda^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{FE} \\ F^{MF} \\ q^{FE} \\ q^{MF} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$g_i = \int_0^1 \varepsilon \lambda^s d\varepsilon + \int_0^1 (1-\varepsilon) \lambda^{s+1} d\varepsilon \quad (28)$$

در اینجا نیز ضرایب لاگرانژ مجهول تعریف شده، با اعمال شرایط مرزی قابل محاسبه هستند. از سوی دیگر، با توجه به ثابت بودن λ^s در هر قسمت از مرز، رابطه (۲۸) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$g_i = \frac{1}{2} (\lambda^s + \lambda^{s+1}) \quad (29)$$

در نهایت دستگاه معادلات بیان شده در رابطه (۲۴) به صورت زیر ساده سازی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} K^{FE} & H_v^{FE} \\ H_u^{FE} & I^{FE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{FE} \\ \lambda^{FE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{FE} \\ q^{FE} \end{bmatrix} \quad (30)$$

در این رابطه H_v^{FE} ، H_u^{FE} و I^{FE} برای اعمال شرایط مرزی رابین بر مرز $\partial\Omega^{FE}$ استفاده می‌شوند. H_v^{FE} با بسط دادن رابطه (۲۹) تعریف می‌شود. درایه‌های این ماتریس برای قسمت‌های مرزی رابین مقدار داشته؛ برای مرزهای نیومن همگن و دیریشله مقدار صفر دارد. در هر سطر از این ماتریس به ازای گره i قرار گرفته بر روی مرز، برای دو قسمت متصل به آن عدد $0/5$ و برای سایر قسمت‌های مرزی عدد صفر در نظر گرفته می‌شود:

$$H_v^{FE} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1_{i,s} & 1_{i,s+1} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times BS}$$

در این رابطه BS تعداد قسمت‌های مرز $\partial\Omega^{FE}$ و n تعداد گره‌های تعریف شده در Ω^{FE} هستند. همچنین با در نظر گرفتن شرط مرزی رابین تعریف شده در رابطه (۸) برای قسمت مرزی s -ام، در سطر s -ام زیرماتریس H_u^{FE} ، ستون متناظر با گره ابتدایی قسمت s -ام مقدار $\gamma^s/2$ و سایر ستون‌ها مقدار صفر خواهند داشت:

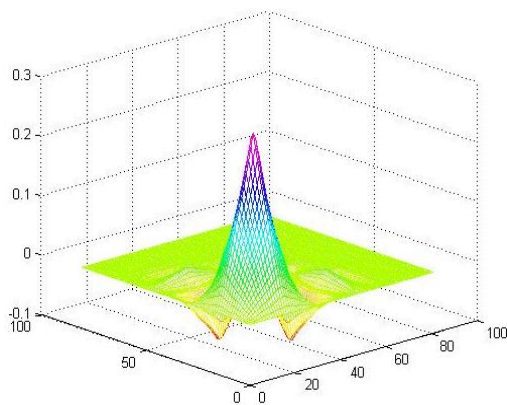
$$H_u^{FE} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dots & \gamma^1 1_{1,i^1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma^{BS} 1_{BS,j^{BS}} & \dots & 0 \end{bmatrix}_{BS \times n}$$

ماتریس I^{FE} نیز قطری بوده که بر روی قطر آن مقدار $-1/l^s$ قرار می‌گیرد:

در این رابطه $\varphi(x)$ تابع مقیاس مادر، z پارامتر مقیاس و i پارامتر انتقال هر دو اعداد صحیح هستند. حال با فرض تفکیک‌پذیر بودن تابع مقیاس موجک دو بعدی مورد نظر، تابع مقیاس موجک دو بعدی با استفاده از رابطه زیر قابل دست‌یابی است [۵۲]:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad (۳۵)$$

شکل (۲) تابع مقیاس موجک دو بعدی مادر دابچی مرتبه ۳ را نشان می‌دهد که در این تحقیق برای تولید مجموعه توابع پایه به کار گرفته شده است.



شکل (۲) - تابع مقیاس دو بعدی دابچی مرتبه ۳.

اما همانطور که در مقدمه ذکر شد، روش گالرکین مبتنی بر موجک به دلیل صفر بودن مقدار توابع موجک و مقیاس بر روی مرزها، در اعمال شرایط مرزی ناتوان است. برای رفع این مشکل از روش اضافه کردن توابع پرش به مجموعه توابع پایه استفاده می‌شود. در مراجع [۱۵، ۲۴، ۲۵، ۲۷] از توابع پرش چندجمله‌ای و در مرجع [۱۶] از توابع پرش شیب برای اعمال شرایط مرزی و حد فاصل در ناحیه بدون مش استفاده شده است. بحث تئوری و نتایج شبیه‌سازی ارائه شده در منبع [۱۶] نشان می‌دهد که توابع پرش شیب به دلیل اینکه مشتق آن‌ها در مرزهای نواحی دقیقاً شکل تابع پله را به خود می‌گیرند، در اعمال شرایط مرزی بسیار موفق‌تر از توابع چندجمله‌ای عمل می‌کنند. به همین منظور در این تحقیق از توابع پرش شیب به جای توابع پرش چندجمله‌ای استفاده شده در مطالعه [۲۵]، برای اعمال شرایط حد

در این دستگاه، زیر ماتریس‌های G_u^{FE} ، G_v^{FE} ، G_u^{MF} و G_v^{MF} مربوط به اعمال شرایط پیوستگی و ارتباط دو ناحیه بر گره‌های مشترک قرار گرفته بر روی $\partial\Omega^C$ هستند. با جایگذاری بسط (۹) در شرط پیوستگی (۳۱)، این زیر ماتریس‌ها به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$G_u^{FE} = (G_v^{FE})^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -1|_{1,i^1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & -1|_{nc,i^{nc}} & \dots & 0 \end{bmatrix}_{nc \times n}$$

$$G_u^{MF} = (G_v^{MF})^T = \begin{bmatrix} \phi_1(P_1) & \dots & \phi_M(P_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1(P_{nc}) & \dots & \phi_M(P_{nc}) \end{bmatrix}_{nc \times M}$$

nc تعداد گره‌های قرار گرفته بر مرز مشترک $\partial\Omega^C$ است. شرط پیوستگی (۳۲) نیز با تخصیص مقداری یکتا به λ^h ها بر مرز مشترک $\partial\Omega^C$ در درون بردار ضرایب لاگرانژ مجهول λ^c برقرار می‌شود:

$$\lambda^c = [\lambda^1 \quad \dots \quad \lambda^{nc}]^T$$

۳-۴- تابع‌های پایه موجک

از آنجایی که توابع موجک^{۲۷} به طور معمول حول مقدار صفر نوسان می‌کنند و دارای مقدار متوسط صفر هستند، برای ایجاد تقریب مناسب نیستند و معمولاً از توابع مقیاس^{۲۸} برای ساخت مجموعه توابع پایه موجک در تقریب گالرکین مبتنی بر موجک استفاده می‌شود. تابع مقیاس دابچی^{۲۹} به دلیل دارا بودن ویژگی‌هایی از جمله دوره محدود و متعامد بودن از مناسب‌ترین انتخاب‌ها است [۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۷]. البته باید توجه داشت که توابع مقیاس، تنها با انتقال تعامد خود را حفظ می‌کنند. به عبارت دیگر توابع مقیاس در سطحی خاص بر یکدیگر عمود هستند ولی بر توابع مقیاس سطوح دیگر عمود نیستند. بدین معنی که، در صورت استفاده از توابع مقیاس به عنوان مجموعه توابع پایه موجک، فقط تقریب می‌تواند از طریق توابع پایه یک مقیاس خاص انجام شود. بنابراین مجموعه توابع پایه موجک یک‌بعدی به شکل زیر تولید می‌شوند [۲۷]:

$$\varphi_i^j(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - i) \quad (۳۴)$$

²⁷Wavelet Functions

²⁸Scaling Functions

²⁹Daubechies

اندازه‌گیری ولتاژ القایی از سایر سیم‌پیچ‌ها انجام می‌شود. در مسأله مفروض، ضریب رسانایی جسم هدف $\sigma = 5 \text{ S/m}$ ، هوا $\sigma = 5 \times 10^{-15} \text{ S/m}$ و حجم هادی $\sigma = 1 \text{ S/m}$ فرض شده است. سیم‌پیچ‌ها از جنس مس با ضریب رسانایی $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ ساخته شده‌اند. ضرایب نفوذپذیری مغناطیسی نسبی هوا، سیم‌پیچ‌ها و جسم $\mu_r = 1$ فرض شده‌اند. فرکانس تحریک نیز ۵ کیلوهرتز فرض شده است. سیم‌پیچ‌ها در داخل محافظ (شیلد) الکترومغناطیس به قطر 0.2 m و عمق 0.2 m قرار گرفته‌اند. این حفاظ الکترومغناطیس - که با نام حفاظ فلزی نیز شناخته می‌شود- از تأثیرپذیری اندازه‌گیری‌ها از میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی خارجی جلوگیری می‌کند. این صفحه فلزی محاط‌کننده سیم‌پیچ‌ها به زمین وصل می‌شود. فرض شده خارج از این حفاظ الکترومغناطیس شدت میدان برابر صفر است. در این مسأله مشابه مراجع [۳، ۴۳، ۴۴]، خارج حفاظ را مش‌بندی نکرده؛ شرط دیریشله صفر روی مرز اعمال می‌شود.

در وسط ناحیه مورد حل، ناحیه‌ای با ابعاد $0.08 \times 0.08 \text{ m}$ که در بر گیرنده جسم هدف است (ناحیه بدون مش)، برای حل به روش گالریکین مبتنی بر موجک در نظر گرفته شده است. برای این منظور این ناحیه ابتدا به تعداد 81×81 نقطه تقسیم می‌شود و سپس ۱۲۲۵ عدد تابع مقیاس موجک به همراه ۸۱ تابع پرش شیب دوبعدی (با تقسیم کردن ناحیه بدون مش به ۶۴ زیر ناحیه) مجموعه توابع پایه را تشکیل می‌دهند. ناحیه بیرونی نیز برای حل به روش اجزای محدود در نظر گرفته می‌شود (ناحیه اجزای محدود). نحوه مش‌بندی این ناحیه در شکل (۵) نمایش داده شده است. این ناحیه به کمک تعریف تعداد ۷۶۰ گره، به تعداد ۱۴۲۱ جزء تقسیم شده است. بدین ترتیب مقدار بردار پتانسیل مغناطیسی در گره‌های ناحیه اجزای محدود و ضرایب توابع پایه در ناحیه بدون مش بردار مجهول‌ها را تشکیل می‌دهند. با محاسبه این مجهول‌ها، مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی در سیستم مورد بحث حل می‌شود. در شکل (۶) مؤلفه حقیقی بردار پتانسیل مغناطیسی بدست آمده با

فاصل ناحیه اجزای محدود و بدون مش استفاده می‌شود. توابع پرش شیب یک‌بعدی بهنجار متناظر با نقاط ابتدایی و انتهایی بازه مورد حل به شکل زیر تعریف می‌شوند [۱۶]:

$$\begin{aligned}\phi_{slop}^s(x) &= 1-x \\ \phi_{slop}^e(x) &= x\end{aligned}\quad (36)$$

بدین ترتیب در محیطی دوبعدی، چهار تابع پرش دوبعدی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\phi^1(x, y) &= \phi_{slop}^s(x)\phi_{slop}^s(y) \\ \phi^2(x, y) &= \phi_{slop}^s(x)\phi_{slop}^e(y) \\ \phi^3(x, y) &= \phi_{slop}^e(x)\phi_{slop}^s(y) \\ \phi^4(x, y) &= \phi_{slop}^e(x)\phi_{slop}^e(y)\end{aligned}\quad (37)$$

این توابع پرش شیب دوبعدی در شکل (۳) نشان داده شده‌اند. در نهایت پس از اضافه کردن این توابع شیب به مجموعه توابع پایه موجک قبلی، مجموعه توابع پایه دوبعدی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}u^{MF}(x, y) &= \sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} \phi_{i_1, i_2}(x, y) \\ &+ \sum_{k, r} b_k^r \phi_k^r(x, y) \quad r = 1, 2, 3, 4\end{aligned}\quad (38)$$

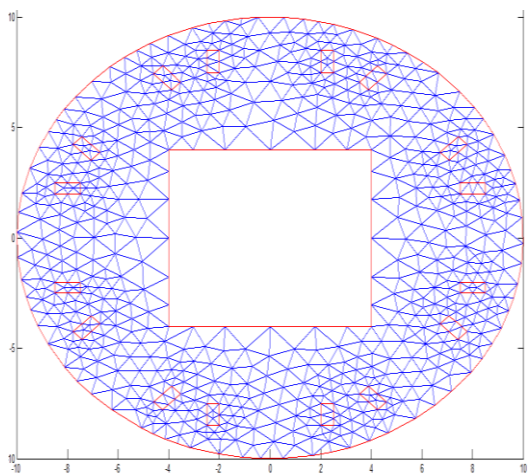
توابع مقیاس موجک دوبعدی حاصل از انتقال تابع مقیاس مادر $\phi(x)$ به اندازه i_1 و i_2 در دو راستای x و y در ناحیه مورد حل، $\phi_k^r(x)$ توابع پرش شیب در زیر ناحیه k -ام از محیط مورد حل و a_{i_1, i_2} و b_k^r ضرایب متناظر با این توابع پایه هستند.

۴- نتایج شبیه‌سازی

با هدف ارزیابی کارایی روش پیشنهادی در حل مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی، نمونه‌ای عملی از یک سیستم مقطع‌نگار القای مغناطیسی ۸ سیم‌پیچه در نظر گرفته شده است. شکل (۴) طرحی نمادین را از این سیستم شامل ۸ سیم‌پیچ تحریک و گیرنده نشان می‌دهد [۴۴]. هر سیم پیچ متشکل از ۵۰ دور سیم با سطح مقطع 1 mm^2 است. در این شکل، سیستم در حالتی فرض شده است که در آن به اولین سیم‌پیچ جریان سینوسی با چگالی جریان $J = 1 \text{ MA/m}^2$ اعمال می‌شود و

برای اثبات کارایی روش ترکیبی، نتایج این روش با نتایج روش اجزای محدود در نواحی مختلف مقایسه شده است. نتایج مقایسه مقدار ولتاژهای اندازه‌گیری شده از ۷ سیم‌پیچ گیرنده (سیم‌پیچ‌های دوم تا هشتم) - که به کمک شبیه‌سازی سیستم با دو روش ترکیبی پیشنهادی و اجزای محدود معمول محاسبه شده‌اند- با نتایج دقیق که از روش اجزای محدود با ۴۷۱۸۱ گره و ۹۳۷۶۰ جزء بدست آمده است، در جدول (۱) گردآوری شده‌اند. این مقایسه نشان‌دهنده دقت خوب روش پیشنهادی در ارائه حلی دقیق از مسأله پیشرو است. در جدول (۲) نیز درصد خطای مؤثر هنجار شده و خطای فاز بین بردار پتانسیل مغناطیسی حاصل از سه روش ترکیبی پیشنهادی، روش ترکیبی معرفی شده در مرجع [۲۵] (به‌کارگیرنده توابع پرش چندجمله‌ای) و اجزای محدود معمول با نتایج حل دقیق در ۱۲۰۱ نقطه در درون ناحیه حل مقایسه شده است. درصد خطای مؤثر هنجار شده از رابطه زیر بدست آمده است:

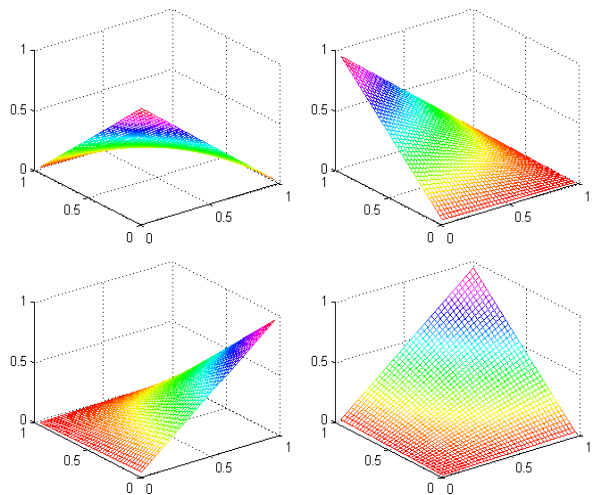
$$\%error_{rmsn} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (f_i - \tilde{f}_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N f_i^2}} \quad (39)$$



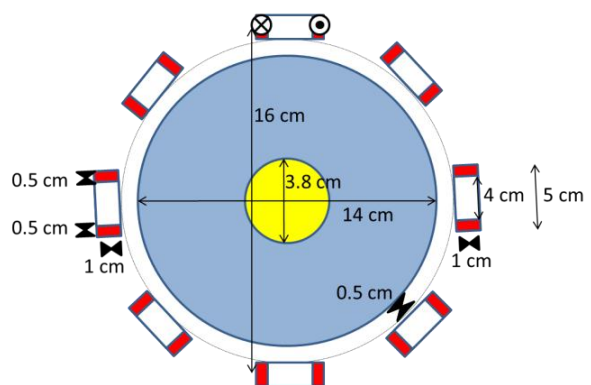
شکل (۵) - مش بندی ناحیه کناری برای حل به وسیله روش

ترکیبی اجزای محدود - بدون مش در مسأله مقطع نگار ۸ سیم پیچه.

روش ترکیبی اجزای محدود - بدون مش مبتنی بر موجک در کل ناحیه مورد حل نمایش داده شده است. با هدف ارزیابی نتایج حاصل از این روش ترکیبی، توزیع بردار پتانسیل مغناطیسی در کل ناحیه حل با استفاده از روش اجزای محدود نیز بدست آورده شده است. مش مورد استفاده در شکل (۷) نمایش داده شده است. نتیجه این مش‌بندی ایجاد ۷۷۱ گره و ۱۴۶۵ جزء است. در شکل (۸) نیز توزیع مولفه حقیقی بردار پتانسیل مغناطیسی بدست آمده از روش اجزای محدود نمایش داده شده است.

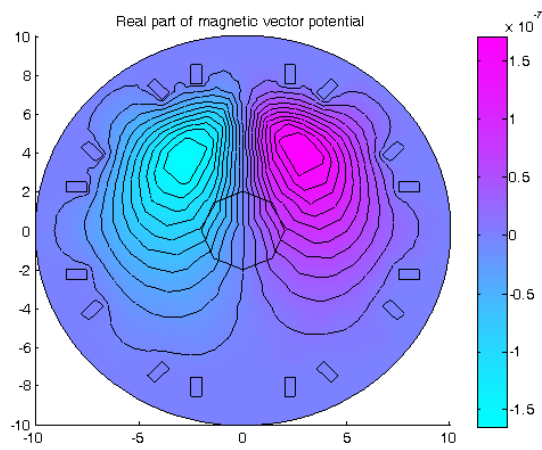


شکل (۳) - توابع پرش شیب دو بعدی.



شکل (۴) - طرحی نمادین از سیستم مقطع نگاری ۸ سیم پیچه مفروض برای حل مسأله پیشرو [۴۴].

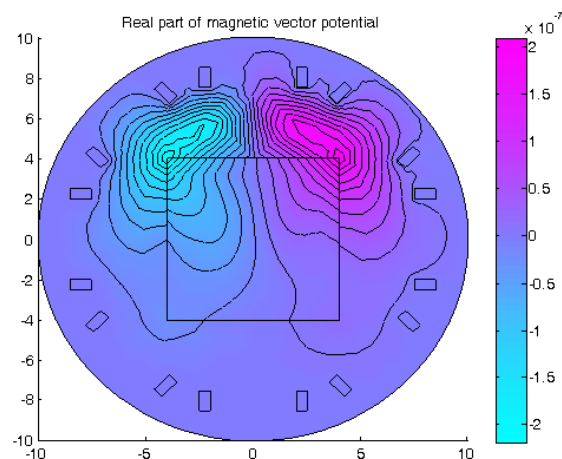
با دقت بهتری تقریب را دنبال خواهند کرد. این در حالی است که در صورت استفاده از توابع پرش چندجمله‌ای، با افزایش تعداد توابع پرش - که کوچک شدن زیر نواحی تعریف توابع پرش را به دنبال خواهد داشت - مشتق این توابع شکل تابع ضربه را به خود خواهد گرفت و این افزایش نه تنها دقت حل را افزایش نمی‌دهد، بلکه باعث افزایش خطای تقریب مورد نظر می‌شود. همچنین مقایسه نتایج روش پیشنهادی با اجزای محدود معمول، نشان‌دهنده افزایش دقت در روش ترکیبی پیشنهادی به دلیل افزایش انعطاف‌پذیری و درجه آزادی در مقایسه با روش اجزای محدود معمول و در عین حال افزایش زمان محاسبات است.



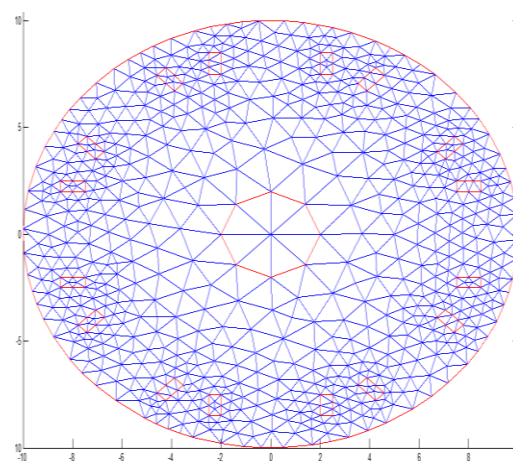
شکل (۶) - توزیع قسمت حقیقی بردار پتانسیل مغناطیسی

حاصل از روش اجزای محدود معمول برای کل ناحیه مورد حل.

البته در این مقایسه باید به این نکته توجه داشت که نتایج روش اجزای محدود با استفاده از به‌کارگیری مش غیریکنواخت و با فرض اینکه مکان مرزهای نواحی داخلی مسأله معلوم هستند، بدست آمده؛ و مقایسه شده‌اند و این در صورتی است که در حل مسأله معکوس مقطع‌نگاری اطلاعات کافی از هندسه محیط مورد حل موجود نیست و به‌کارگیری مش غیر یکنواخت منطبق با محیط مورد حل برای مسائل مقطع‌نگاری الکتریکی امکان‌پذیر نخواهد بود. در مرجع [۱۶] برای مسأله مقطع‌نگاری امپدانس الکتریکی نشان داده شده است که



شکل (۷) - توزیع قسمت حقیقی بردار پتانسیل مغناطیسی حاصل از روش ترکیبی اجزای محدود - بدون مش.



شکل (۸) - توزیع قسمت حقیقی بردار پتانسیل مغناطیسی حاصل از روش اجزای محدود معمول برای کل ناحیه مورد حل.

در رابطه (۳۹)، مقدار پتانسیل تقریب زده شده و f_i مقدار دقیق پتانسیل است. مقایسه نتایج در جدول (۲) حاصل از دو روش پیشنهادی ترکیبی که در آن از توابع پرش شیب استفاده شده، با روش ترکیبی ارائه شده در مرجع [۲۵] که در آن توابع پرش چندجمله‌ای به کار گرفته شده، نشان می‌دهد به دلیل ایجاد دقیق مشتق توابع پرش شیب به شکل تابع پله بر روی مرز دو ناحیه، دقت حل مسأله پیشرو توسط روش ترکیبی در صورت استفاده از توابع پرش شیب افزایش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد. البته این موضوع به افزایش تعداد توابع پرش نیز بر می‌گردد؛ چرا که هر اندازه تعداد توابع پرش حد فاصل بیشتر شود، درجه آزادی حل در مرز دو ناحیه افزایش بیشتری خواهد داشت و در نتیجه دو ناحیه بهتر به یکدیگر اتصال یافته؛

محدود بیشتر خواهد بود. این موضوع بویژه در مسائل دارای هندسه متغییر به وضوح قابل مشاهده است.

در صورت استفاده از مش یکنواخت در حل اجزای محدود، دقت روش ترکیبی اجزای محدود - بدون مش مبتنی بر موجک در حل مسأله پیشرو از روش اجزای

جدول (۱) - مقایسه مقدار ولتاژهای اندازه‌گیری شده از سیستم مقطع‌نگار ۸ سیم پیچه (وقتی که سیم پیچ ۱ تحریک شده است) حاصل از شبیه‌سازی با دو روش پیشنهادی ترکیبی اجزای محدود - بدون مش مبتنی بر موجک و اجزای محدود با نتایج حل دقیق

روش اجزای محدود			روش پیشنهادی			حل دقیق	سیم پیچ گیرنده
خطای فاز (رادیان)	خطای اندازه	حل	خطای فاز (رادیان)	خطای اندازه	حل		
۰/۰۰۰۸	۰/۷۷۰۳	۶/۴۳۲۹-j۰/۲۲۲۸	۰/۰۶۱۴	۱/۴۴۶۰	۵/۷۳۴۰-j۰/۵۵۷۰	۷/۲۰۲۵-j۰/۲۵۵۳	۲
۰/۰۰۸۵	۰/۰۴۵۵	۰/۷۲۳۶-j۰/۱۷۸۱	۰/۰۷۷۲	۰/۰۴۵۰	۰/۷۰۶۱-j۰/۲۳۹۵	۰/۷۶۶۱-j۰/۱۹۵۵	۳
۰/۰۳۰۴	۰/۰۱۱۳	۰/۱۵۷۷-j۰/۰۶۳۳	۰/۱۲۰۴	۰/۰۲۸۷	۰/۱۳۱۴-j۰/۰۷۷۴	۰/۱۶۶۰-j۰/۰۷۲۵	۴
۳/۵۱۹۳	۰/۰۰۲۸	-۰/۰۰۳۱+j۰/۰۰۳۸	۳/۸۳۲۴	۰/۰۰۰۲	-۰/۰۰۱۹+j۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۰۶-j۰/۰۰۲۰	۵
۰/۰۲۱۴	۰/۰۰۰۵	-۰/۱۳۱۳+j۰/۰۵۷۳	۰/۱۳۸۵	۰/۰۳۰۸	-۰/۰۹۷۶+j۰/۰۵۷۰	-۰/۱۳۳۰+j۰/۰۵۴۷	۶
۰/۰۰۷۶	۰/۰۱۸۷	-۰/۵۶۳۱+j۰/۱۳۹۱	۰/۰۸۶۹	۰/۲۰۹۲	-۰/۷۶۶۶+j۰/۲۵۵۳	-۰/۵۸۲۴+j۰/۱۳۹۲	۷
۰/۰۰۲۹	۰/۴۴۳۵	-۵/۸۸۳۱+j۰/۲۶۷۵	۰/۰۵۴۸	۰/۲۱۷۸	-۶/۵۱۹۴+j۰/۶۳۷۱	-۶/۳۲۶۹+j۰/۲۶۹۶	۸

جدول (۲) - مقایسه کارایی روش ترکیبی پیشنهادی، ترکیبی معرفی شده در مرجع [۲۵] و اجزای محدود معمول

زمان محاسبات* (ثانیه)	خطای فاز	درصد خطای مؤثر نرمال شده	درجه آزادی	تعداد توابع پایه	تعداد گره‌های اجزای محدود	روش
۳/۵۹۲۵	۰/۲۱۴۲	۳/۳۸۸۳	۲۰۶۶	۱۳۰۶	۷۶۰	ترکیبی پیشنهادی (با به‌کارگیری توابع پرش شیب)
۳/۱۲۳۷	۰/۲۴۴۶	۵/۲۱۲۴	۱۹۸۹	۱۲۲۹	۷۶۰	ترکیبی با به‌کارگیری توابع پرش چندجمله‌ای [۲۵]
۰/۷۴۳۹	۰/۱۹۸۸	۳/۴۳۶۶	۷۷۱	-	۷۷۱	اجزای محدود معمول

* محاسبات در یک رایانه با پردازنده Core i7 3.06 GHz CPU, 4 GB RAM انجام شده است.

۵- نتیجه گیری

روش اجزای محدود قادر به ارائه حل دقیق برای مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی در هندسه‌های پیچیده است؛ اما از آنجایی که نتایج روش اجزای محدود بسیار وابسته به شکل و اندازه اجزا است، در مواردی که جسم هدف در حال تغییر شکل است، مثل نواحی متحرک داخل بدن، این روش خطای زیادی را به همراه خواهد داشت. از سوی دیگر به دلیل اینکه روش گالرکین مبتنی بر موجک وابسته به مش نیست، این محدودیت را ندارد و برای نواحی متحرک مناسب است. در عین حال به دلیل صفر بودن مقدار توابع پایه موجک در مرزهای ناحیه، روش گالرکین مبتنی بر موجک برای اعمال شرایط مرزی به استفاده از روش‌های خاصی نیاز دارد که دقت کمتری در اعمال شرایط مرزی در مقایسه با روش اجزای محدود دارد. همچنین این روش برای به کارگیری در هندسه‌های پیچیده با مشکل روبرو است. از طرف دیگر، به دلیل نیازمندی به محاسبه عددی انتگرال‌ها در روش گالرکین مبتنی بر موجک در مقایسه با محاسبه تحلیلی آن‌ها در روش اجزای محدود، روش گالرکین مبتنی بر موجک زمان بیشتری را برای انجام محاسبات صرف می‌کند. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که با ترکیب دو روش گالرکین مبتنی بر موجک و اجزای محدود معمول، می‌توان همزمان از مزیت‌های هر دو روش سود برد. برای ایجاد رابطه بین دو ناحیه بدون مش و اجزای محدود مجبور به اضافه کردن توابع پرش به مجموعه توابع پایه موجک هستیم. در انتخاب نواحی، استفاده از روش اجزای محدود در نواحی مرزی و دارای هندسه پیچیده مثل محل قرارگیری سیم‌پیچ‌ها و گالرکین مبتنی بر موجک در نواحی متحرک بهترین نتیجه را به همراه خواهد داشت. مقایسه نتایج روش پیشنهادی ترکیبی با روش اجزای محدود معمول نشان‌دهنده قابلیت روش پیشنهادی اجزای محدود - بدون مش مبتنی بر موجک در حل مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی است.

۶- مراجع

- [1] Holder D.S., Electrical impedance tomography, IOP publishing, Bristol, UK, 2004.
- [۲] یوسفی‌نجف آبادی م.ر.، هادی‌نیا م.، جعفری ر.، ابریشمی‌مقدم ح.، تقی‌راد ح.ر.، کاربردهای مقطع‌نگاری الکتریکی و نوری در صنعت نفت و گاز؛ دومین همایش بازرسی و ایمنی در صنایع نفت و انرژی، تهران، بهمن ماه ۱۳۹۰.
- [3] Soleimani M., Tamburrino A., Shape reconstruction in magnetic induction tomography using multi frequency data; *Int. J. Inform. Syst. Sci.*, 2006; 2: 343-353.
- [4] Griffiths H., Magnetic induction tomography," *Meas. Sci. Techno.*, 2001; 12: 1126-1131.
- [5] Horner B., Mesch F., An induction flow-meter insensitive to asymmetric flow profiles; *Eur. Concerted Action Process Tomography Conf.*, Norway, 1995: 321-330.
- [6] Tomita Y., Honda S., Estimation of velocity profile by magnetic flowmeter with rotating field; *SICE Conf.*, Japan, 1992: 1301-1304.
- [7] Williams R., Beck M., Process tomography: principles, techniques, and applications, Butterworth Heinemann Ltd, Oxford, Britain, 1995.
- [8] Biro O., Edge element formulations of eddy current problems; *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1999; 169: 391-405.
- [9] Biro O., Preis K., An edge finite element eddy current formulation using a reduced magnetic and a current vector potential; *IEEE Trans. Magn.*, 2000; 36: 3128-3130.
- [10] Merwa R., Hollaus K., Brandstatter B., Scharfetter H., Numerical solution of the general 3D eddy current problem for magnetic induction tomography (spectroscopy); *Physiol. Meas.*, 2003; 24: 545-554.
- [11] Cong W., Xiu-zhen D., Rui-gang L., Feng F., Xue-tao S. and Fu-sheng Y., Preliminary simulations on magnetic induction tomography of the brain based on finite element method; *J. US-China Med. Sci.*, 2007; 4: 11-17.
- [12] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. and Krysl P., Mesh-less methods: an overview and recent developments; *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1996; 139: 3-47, 1996.
- [13] L. Xuan, Z. Zeng, B. Shanker, and L. Udpa, Element free galerkin method for static and quasi-static electromagnetic field computation; *IEEE Trans. Magn.*, 2004; 40: 12-20.
- [14] Cutrupi V., Ferraioli F., Formisano A. and Martone R., An approach to the electrical resistance tomography based on meshless methods; *IEEE Trans. Magn.*, 2007; 43: 1717-1720.

- [28] Mehra M., Wavelets and differential equations: a short review; AIP Conf. Proceed., 2009; 1146: 241-252.
- [29] Beylkin G., On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets; SIAM J. Numer. Anal., 1992; 29: 1716-1740.
- [30] Dahmen W., Micchelli C.A., Using the refinement equation for evaluating integrals of wavelets; SIAM J. Numer. Anal., 1993; 30: 507-537.
- [31] Joly P., Maday Y. and Perrier V., Towards a method for solving partial differential equations by using wavelet packet bases; Comput. Meth. Appl. Mechanics Eng., 1994; 116: 301-307.
- [32] Glowinski R., Pan T.W., Wells Jr. R.O., Zhou X., Wavelet and finite element solutions for the Neumann problem Using fictitious domains; J. Computational Physics, 1996; 126: 40-51.
- [33] Baccou J., Liandrat J., On coupling wavelets with fictitious domain approaches; Appl. Math. Lett., 2005; 18: 1325-1331.
- [34] Xu J.C., Shann W.C., Galerkin wavelet methods for two point boundary value problems; Numerische Mathematik, 1992; 63: 123-144.
- [35] Yang S., Ni G., Qian J., Li R., Wavelet Galerkin method for computations of electromagnetic fields; IEEE Trans Magn, 1998; 34: 2493-2496.
- [36] Chen X., Yang S., Ma J., He Z., The construction of wavelet finite element and its application; Finite Elements Anal. Design, 2004; 40: 541-554.
- [37] Han J.G., Ren W.X., Huang Y., A spline wavelet finite-element method in structural mechanics; Int. J. Numer. Meth. Eng., 2006; 66: 166-190.
- [38] Yang S.Y., Ni G.Z., Ho S.L., Machado J.M., Rahman M.A., Wong H.C., Wavelet galerkin method for computations of electromagnetic fields computation of connection coefficients; IEEE Trans. Magn., 2000; 36: 644-648.
- [39] Hegen D., Element free Galerkin methods in combination with finite element approaches; Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1996; 135: 143-166.
- [40] Rao B.N., Rahman S., A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks; Int. J. Pressure Vessels and Piping, 2001; 78: 647-657.
- [41] Cingoski V., Miyamoto N., Yamashita H., Hybrid element free galerkin-finite element method for electromagnetic field computations; IEEE Trans. Magn., 2000; 36: 1543-1547.
- [42] Yin H., Lin L., A new EFG-FEM algorithm for electromagnetic computation; Asia-Pacific Conf. Environmental Electromagnetics, 2003: 461-464.
- [43] Soleimani M., Jersey-Willuhn K., Sensitivity analysis for magnetic induction tomography; 26th IEEE-EMBS Int. Conf. , 2004: 1368-1371.
- [44] Soleimani M., Image and shape reconstruction methods in magnetic induction and electrical impedance tomography; PhD thesis, Faculty of Engineering and Physical Sciences, University of Manchester, 2005.
- [15] Yang S. Y., Ni G. Z., Cardoso J. R., Ho S. L. and Machado J. M., A combined wavelet-element free galerkin method for numerical calculations of electromagnetic fields; IEEE Trans. Magn., 2003; 39: 1413-1416.
- [16] Yousefi M.R., Jafari R., Abrishami-Moghaddam H., A combined wavelet based mesh free method for solving the forward problem in electrical impedance tomography; IEEE Trans. Instrum. Meas, 2013; 62: 2629-2638.
- [17] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L., Element-free Galerkin methods; Int. J. Numer. Meth. Eng., 1994; 37: 229-256.
- [18] Amaratunga K., Williams J.R., Qian S., Weiss J., Wavelet-Galerkin solutions for one-dimensional partial differential equations; Int. J. Numer. Meth. Eng., 1994; 37: 2703-2716.
- [19] Amaratunga K., Williams J.R., Wavelet-Galerkin solution of boundary value problems; Archives Comput. Methods Eng., 1997; 4: 243-285.
- [20] Lu D., Ohyoshi T., Zhu L., Treatment of boundary conditions in the application of wavelet-Galerkin method to a SH wave problem; Int. J. Soc. Mat. Eng. Resources, 1997; 5:15-25.
- [21] Landragin-Frassati A., Bonnet S., Da Silva A., Dinten J. M. and Georges D., Application of a wavelet-Galerkin method to the forward problem resolution in fluorescence diffuse optical tomography; Optics Express, 2009; 17: 18433-18448.
- [22] Mishra V., Sabina., Wavelet Galerkin solutions of ordinary differential equations; Int. J. Math. Anal., 2011; 5: 407-424.
- [23] Iqbal A., Jeoti V., A novel wavelet-Galerkin method for modeling radio wave propagation in Tropospheric ducts; Progress Electromagn. Research B, 2012; 36: 35-52.
- [24] Yousefi M.R., Jafari R., Abrishami-Moghaddam H., A combined wavelet based mesh free method for solving the forward problem in electrical impedance tomography; IEEE Int. Symp. Med. Meas. Appl. Proc., Budapest, Hungary, 2012: 251-254.
- [۲۵] یوسفی نجف آبادی م.ر.، جعفری ر.، ابریشمی مقدم ح.، به‌کارگیری روش ترکیبی بدون‌مش مبتنی بر موجک برای حل مسأله پیشرو مقطع‌نگاری القای مغناطیسی؛ بیستمین کنفرانس مهندسی زیست پزشکی ایران، دانشگاه تهران، آذرماه ۱۳۹۲.
- [26] Chen M.Q., Hwang C.H., Shih Y.P., The computation of wavelet-Galerkin approximation on a bounded interval; Int. J. Nume. Methods Eng., 1996; 39: 2921-2944.
- [27] Ho S.L., Yang S., Wong H.C., Weak formulation of finite element method using wavelet basis functions; IEEE Trans. Magn., 2001; 37: 3203-3207.

- [۴۹] نجفی م، استفاده از تبدیل موجک در بازسازی تصاویر سیستم‌های مقطع‌نگاری؛ پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده برق، ۱۳۸۸.
- [50] Fernandez-Mendez S., Huerta A., Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods; *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2004; 193: 1257-1275.
- [51] Mehraeen S., Chen J.S., Wavelet Galerkin method in multi-scale homogenization of heterogeneous media; *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2006; 66: 381-403.
- [52] Castleman K.R., *Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1979.
- [45] Jin J., *The finite element method in electromagnetics*, 2nd Edition, Wiley-IEEE Press, 2002.
- [46] Zolgharni M., Ledger P.D., Griffiths H., Forward modelling of magnetic induction tomography: a sensitivity study for detecting haemorrhagic cerebral stroke; *Med. Biological Eng. Computing*, 2009; 47: 1301-13013.
- [47] Caeiros J.M.S., Martins R.C., An optimized forward problem solver for the complete characterization of the electromagnetic properties of biological tissues in magnetic induction tomography; *IEEE Trans. Magn.*, 2012; 48: 4707-4712.
- [48] Sadiku M.N.O., *Numerical techniques in electromagnetic* (2nd edn), CRC Press, 2001.