

Motion Reconstruction and Error Analysis for Human Planar Motions using at least One Freely-Placed Passive Marker per Segment

Akbarifar, Fatemeh¹ / Honarvar, Mohammad Hadi^{2*} / Haj Lotfalian, Mostafa³

¹ - M.Sc. Student, Faculty of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

² - Assistant Professor, Faculty of Mechanical Engineering / Center of Excellence for Support Systems in Health Development, Yazd University, Yazd, Iran

³ - Ph.D., Center of Excellence for Support Systems in Health Development, Yazd University, Yazd, Iran

ARTICLE INFO

DOI: 10.22041/IJBME.2021.128760.1599

Received: 7 June 2020

Revised: 5 February 2021

Accepted: 15 April 2021

KEYWORDS

Motion Reconstruction

Center of Rotation

Circle Fitting

Error Expectation

Analysis

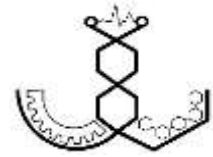
ABSTRACT

Finding the center of rotation (COR) is needed for defining the anatomical axis of the skeletal system and for the kinematic calculation of joints in biomechanical studies. For this purpose, predictive and functional methods can be used. In the predictive methods, regression equations obtained from anthropometric measurements are used, and in the functional methods, the relative motion of the two adjacent segments is used to find COR. The purpose of this study is to formulate the circle fitting algorithm as a functional method with two analytical and optimization solutions. In order to evaluate the algorithm, error analysis was performed by both analytical and numerical methods. Also, effective factors in error estimating of COR position such as standard deviation of measurement system error (σ), rotation angle (α) and the distance between marker and COR (r), was evaluated. The results showed a high correlation ($r=0.99$) between analytical and numerical solution, which proved the accuracy of the error analysis. In this study, optimization method according to the accuracy of better estimates in low quantities α , less influence on high quantities σ and high speed in problem solving, can be taken into consideration to reconstruct human movements in biomechanical studies. Use of functional methods, eliminates the need for attaching markers to anatomical landmarks and provides a new development in motion data acquisition.

*Corresponding Author

Address	Faculty of Mechanical Engineering / Center of Excellence for Support Systems in Health Development, Yazd University, Yazd, Iran		
Postal Code	8915818411	Tel	+98-35-31232506
E-Mail	hadihonarvar@yazd.ac.ir	Fax	+98-35-38212781





بازسازی و تحلیل خطای حرکات صفحه‌ای بدن انسان با استفاده از حداقل یک مارکر با نصب آزاد روی هر قطعه

اکبری فر، فاطمه^۱ / هنرور، محمدهادی^{۲*} / حاج لطفعلیان، مصطفی^۳

^۱ - دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران
^۲ - استادیار، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک / هسته‌ی علمی سامانه‌های پشتیبان در توسعه‌ی سلامت، دانشگاه یزد، یزد، ایران
^۳ - دکتری بیومکانیک ورزش، هسته‌ی علمی سامانه‌های پشتیبان در توسعه‌ی سلامت، دانشگاه یزد، یزد، ایران

مشخصات مقاله

شناسه‌ی دیجیتال: 10.22041/IJBME.2021.128760.1599

پذیرش: ۲۶ فروردین ۱۴۰۰

بازنگری: ۱۷ بهمن ۱۳۹۹

ثبت در سامانه: ۱۸ خرداد ۱۳۹۹

چکیده

واژه‌های کلیدی

یافتن موقعیت مرکز دوران برای تعریف محور آناتومیکی سیستم اسکلتی و در مطالعات بیومکانیکی برای محاسبه‌ی کینماتیک مفاصل ضروری است. برای این منظور می‌توان از روش‌های پیش‌بین و عمل‌کردی استفاده کرد. در روش‌های پیش‌بین از معادلات رگرسیونی حاصل از اندازه‌گیری‌های آنتروپومتریک و در روش‌های عمل‌کردی از حرکت نسبی اندام‌های مجاور مفصل برای یافتن مرکز آنی دوران استفاده می‌شود. هدف از این مطالعه فرموله کردن الگوریتم برازش دایره به عنوان روشی عملیاتی با دو روش حل تحلیلی و بهینه‌سازی است. به منظور ارزیابی الگوریتم، تحلیل خطا به دو روش تحلیلی و عددی انجام شده و عوامل موثر در خطای تخمین موقعیت مرکز دوران مانند انحراف از معیار خطای سیستم داده‌برداری (σ)، زاویه‌ی دوران (α) و فاصله‌ی نشان‌گر از مرکز دوران (r) مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاکی از وجود همبستگی بالا ($r=0.99$) بین دو روش حل تحلیلی و عددی بوده که صحت تحلیل خطا را اثبات کرده است. از بین دو روش حل تحلیلی و بهینه‌سازی که در این مطالعه بررسی شده است، روش بهینه‌سازی با توجه به دقت تخمین مطلوب‌تر در مقادیر پایین α ، تاثیرپذیری کم‌تر در مقادیر بالای σ و سرعت بالا در حل مساله، می‌تواند در مطالعات بیومکانیکی برای بازسازی حرکات انسان مورد توجه قرار گیرد. با گسترش استفاده از روش‌های عمل‌کردی می‌توان نیاز به مارکرگذاری نشانه‌های آناتومیکی را از بین برد و زمینه‌ساز تحولی جدید در داده‌برداری حرکتی شد.

بازسازی حرکت
مرکز دوران
برازش دایره
تحلیل امید ریاضی خطا

*نویسنده‌ی مسئول

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک / هسته‌ی علمی سامانه‌های پشتیبان در توسعه‌ی سلامت، دانشگاه یزد، یزد، ایران

نشانی

تلفن ۹۸-۳۵-۳۱۲۳۲۵۰۶

۸۹۱۵۸۱۸۴۱۱

کد پستی

دورنگار ۹۸-۳۵-۳۸۲۱۲۷۸۱

hadihonarvar@yazd.ac.ir

پست الکترونیک



۱- مقدمه

داده‌برداری از حرکت یک نمونه‌ی واقعی و تطبیق و شبیه‌سازی آن روی یک مدل کامپیوتری، بازسازی حرکت نامیده می‌شود. این فرایند کاربردهای فراوانی در حیطه‌ی پزشکی برای تشخیص، ارزیابی و برنامه‌ریزی مسیر درمان بیماران مبتلا به ناهنجاری‌های حرکتی دارد [۱]. تحلیل سینماتیکی حاصل از بازسازی حرکت می‌تواند به پزشک و تیم درمان برای اتخاذ مناسب‌ترین روش درمانی کمک کند. طراحی و ارزیابی ابزارهای حرکتی متصل به بدن مانند ارتزها، پروتزها و برون‌پوش‌ها [۲]، [۳] و همچنین استفاده‌ی گسترده در سینما و انیمیشن‌سازی [۴] از دیگر کاربردهای بازسازی دقیق حرکات است.

برای شبیه‌سازی و بازسازی حرکت، بعد از انتخاب یک مدل چندقطعه‌ای^۱ و با در اختیار داشتن موقعیت مفاصل، می‌توان وضعیت^۲ مدل را شبیه‌سازی کرد. بدین ترتیب کافی است محل و راستای محور مفاصل در هر لحظه از طریق داده‌برداری حرکتی محاسبه و تخمین زده شود. امروزه متداول‌ترین روش برای داده‌برداری حرکتی، استفاده از سیستم‌های ضبط حرکت نوری مبتنی بر نشان‌گر است. در این روش مختصات نشان‌گرهای بازتابی توسط دوربین‌های حساس به نور ردیابی و ثبت می‌شود. در بهره‌برداری از این ابزار، از دو روش پیش‌بین و عمل‌کردی برای بازسازی حرکات استفاده می‌شود. در روش پیش‌بین از روابط تجربی بین برخی از نشانه‌های آناتومیکی استفاده می‌شود [۵]. در این روش برای به دست آوردن موقعیت مرکز دوران مفاصل، نشان‌گرها بر اساس نشانه‌های آناتومیکی بدن، مستقیماً روی مفاصل نصب می‌شود. مزیت اصلی این روش‌ها، تنظیم اکثر سیستم‌های متداول ثبت و آنالیز حرکت مانند وایکون^۳، کوالیسیس^۴ و موشن آنالیزسیس^۵، با روش‌های مارکرگذاری پیش‌بین مانند پلاگین گیت^۶، هلن هیس^۷ و کلیولند^۸ است. البته این شیوه محدودیت‌هایی نیز دارد که عمده‌ترین آن‌ها مساله‌ی نصب و جابه‌جایی نشان‌گرها است. شناسایی نشانه‌ها در برخی مفاصل مانند مچ پا نسبتاً ساده است اما برای برخی مفاصل مانند ران، تقریباً نشانه‌ی آناتومیکی خارجی وجود ندارد [۶]. بدین ترتیب فرد آموزش دیده باید پس از شناسایی نشانه‌های آناتومیکی، نشان‌گرها را نصب کند که دقت مکان نصب، به تخصص و تجربه‌ی فرد بستگی دارد. به هر حال این نشانه‌ها ظرافتی نداشته، شناسایی و نصب نشان‌گر

روی آن‌ها فرایندی زمان‌بر بوده و نمی‌تواند از حدی دقیق‌تر انجام شود. به استثنای شیوه‌های تهاجمی، نشان‌گرها روی سطح پوست رفتاری کاملاً صلب نداشته [۷] و تغییر شکل دینامیکی و ارتعاش بین پوست و قسمت‌های صلب‌تر قطعه وجود دارد. علاوه بر این انقباض عضلات نیز باعث تغییر شکل و جابه‌جایی نشان‌گرها می‌شود. در نتیجه حین انجام یک حرکت، مکان ثبت شده با مکان مورد انتظار با توجه به موقعیت مفاصل و نشانه‌های آناتومیکی متفاوت بوده که این یک منشا خطا در ثبت موقعیت مفاصل و به دنبال آن بازسازی حرکت روی مدل کامپیوتری است. مطالعات نشان می‌دهد که وجود خطا در شناسایی موقعیت مرکز دوران مفصل هیپ می‌تواند گشتاور فلکشن-اکستنشن و اداکشن-اداکشن را حین گیت به ترتیب ۲۲ و ۱۵ درصد تغییر دهد [۸].

غیر از روش‌های نیمه‌تهاجمی مانند استفاده از تصاویر اشعه‌ی ایکس و فلوروسکوپی [۹]، استفاده از روش‌های عمل‌کردی برای یافتن مرکز آنی دوران و معرفی آن به عنوان محل مفصل، راه‌کاری است که می‌توان برای رفع این چالش‌ها در نظر گرفت [۱۰، ۱۱]. در این روش نیازی به نصب نشان‌گر با توجه به نشانه‌های آناتومیکی بدن نیست و با نصب آن روی سگمان‌ها و استفاده از حرکت نسبی دو سگمان مجاور، محل مرکز آنی دوران تعیین شده و به عنوان تخمینی از محل مفصل ارائه می‌شود [۱۲]. از جمله‌ی روش‌های عمل‌کردی که برای این منظور به کار گرفته شده می‌توان به ریلوکس^۹ [۱۳] و جسم صلب^{۱۰} [۱۴] اشاره کرد. تخمین محل مفاصل با روش‌های عمل‌کردی در مقایسه با روش‌های پیش‌بین دارای مزیت‌هایی است. در این روش‌ها نشان‌گر به صورت کاملاً دل‌خواه و بدون محدودیت روی سگمان‌های بدن نصب شده و نیازی به تخصص آزمون‌گر برای شناسایی نشانه‌های آناتومیکی نیست. بنابراین آماده‌سازی آزمودنی قبل از داده‌برداری، سریع‌تر انجام شده و عامل دخالت و بی‌دقتی احتمالی در هنگام نصب نشان‌گر نیز حذف می‌شود. علاوه بر این امکان محاسبه‌ی مرکز آنی دوران در مفاصلی که مرکز دوران آن‌ها با حرکت جابه‌جا می‌شود از دیگر مزایای روش‌های عمل‌کردی است.

بدین ترتیب مساله‌ی اصلی، تعیین موقعیت مفصل با در اختیار داشتن مختصات نقاطی از سگمان‌ها حین حرکت است. برای این منظور از مختصات به دست آمده از طریق داده‌برداری

^۶ Plug-In Gait^۷ Helen Hayes^۸ Cleveland^۹ Reuleaux^{۱۰} Rigid Body^۱ Link Segment Model^۲ Posture^۳ Vicon^۴ Qualisys^۵ Motion Analysis



در روش برازش دایره به موقعیت حداقل یک نشان‌گر در سه لحظه نیاز است و البته افزایش تعداد لحظات و نیز نشان‌گرها باعث بهبود دقت تخمین خواهد شد. اگر یک جسم صلب حول نقطه‌ی ثابت در حال دوران باشد، در این صورت هر نقطه از این جسم با فاصله‌ای ثابت حول مرکز، دوران خواهد کرد. در شکل (۱) نشان‌گر A روی یک جسم صلب نصب شده است. با استفاده از روش برازش دایره می‌توان موقعیت مرکز دوران را محاسبه کرد و به عنوان تخمینی از محل مفصل در نظر گرفت. در ادامه حل با دو روش تحلیلی و بهینه‌سازی ارائه شده است.

۲-۱-۱- حل تحلیلی

اگر مختصات نشان‌گر A در سه لحظه (A_1, A_2, A_3) و موقعیت مرکز دوران (COR) به صورت زیر باشد (شکل ۱)، بر اساس معادله‌ی دایره به شعاع r_A رابطه‌ی بین مختصات نشان‌گر A در سه لحظه و مرکز دوران طبق روابط (۱-۳) تعریف می‌شود.

$$A_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \text{COR} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix}$$

$$(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 = r_A^2 \quad (1)$$

$$(x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 = r_A^2 \quad (2)$$

$$(x_3 - x_c)^2 + (y_3 - y_c)^2 = r_A^2 \quad (3)$$

اگر نقطه‌ی $\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix}$ یک کاندید برای مرکز دوران باشد، می‌توان آن را بر اساس روش مرسوم مجموع مربعات خطا ارزیابی کرد. به این ترتیب مجموع مربعات اختلاف فاصله‌ی نقطه‌ی A در سه لحظه اندازه‌گیری شده و به عنوان هزینه‌ی (J) یک کاندید مرکز دوران تعریف شده است (رابطه‌ی ۴) و در این صورت کمینه‌ی این هزینه متناظر با برابر بودن سه فاصله و در نتیجه مرکز دوران حقیقی می‌باشد.

$$J = [2(x_2 - x_1)x_c + 2(y_2 - y_1)y_c + (x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)]^2 + [2(x_3 - x_1)x_c + 2(y_3 - y_1)y_c + (x_1^2 + y_1^2) - (x_3^2 + y_3^2)]^2 \quad (4)$$

با تعریف متغیرهای کمکی به صورت زیر، تابع هزینه در رابطه‌ی (۴) به صورت زیر بازنویسی شده است.

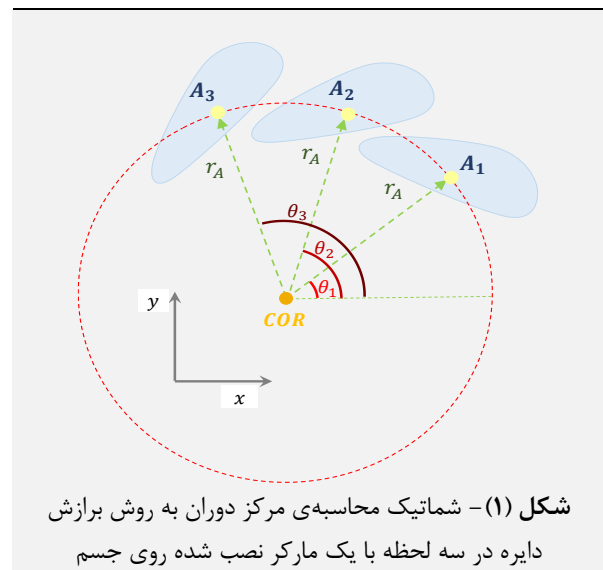
$$\begin{aligned} a_1 &= 2(x_2 - x_1) \\ b_1 &= 2(y_2 - y_1) \\ c_1 &= (x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2) \\ a_2 &= 2(x_3 - x_1) \\ b_2 &= 2(y_3 - y_1) \\ c_2 &= (x_1^2 + y_1^2) - (x_3^2 + y_3^2) \\ J &= (a_1x_c + b_1y_c + c_1)^2 + (a_2x_c + b_2y_c + c_2)^2 \end{aligned}$$

حرکتی، برای محاسبه و تخمین مرکز دوران نسبی مفاصل استفاده می‌شود. در پژوهش حاضر برازش دایره به عنوان روشی برای بازسازی حرکت معرفی شده است. در ابتدا نحوه‌ی محاسبه‌ی مرکز دوران با استفاده از این روش بیان شده و سپس واریانس خطای تخمین محل هر مفصل به صورت تحلیلی پیش‌بینی شده است. هم‌چنین تحلیل خطا با استفاده از داده‌ی شبیه‌سازی شده صورت گرفته و نتایج مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. هدف از این پژوهش معرفی روشی جدید و کارآمد برای بازسازی حرکت، بدون نیاز به نصب نشان‌گر روی مفاصل با استفاده از نشانه‌های آناتومیکی است.

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱- تخمین محل مفصل با روش برازش دایره

در این پژوهش حرکات به صورت صفحه‌ای مورد بررسی قرار گرفته و در نتیجه راستای محور تمام مفاصل، عمود بر صفحه‌ی حرکت است. از آن‌جا که در هر مفصل اگر حرکات نشان‌گرهای روی یک عضو از دید ناظر متصل به عضو دیگر توصیف شود، حول مرکز آنی دوران مفصل دارای حرکت دایره‌ای خالص است، با برازش دایره بر مسیر حرکت نشان‌گرها، مرکز آنی دوران محاسبه شده و به عنوان تخمینی از موقعیت مفصل معرفی شده است. در صورتی که دایره‌ای بر مسیر حرکت نشان‌گرها منطبق شود، مرکز دایره‌ی مذکور، مرکز آنی دوران است. بدین ترتیب لازمه‌ی تخمین موقعیت تمام مفاصل در تمام لحظات و بازسازی حرکت، نصب حداقل دو نشان‌گر روی هر یک از عضوهای دو سمت مفاصل، جز عضو انتهایی هر زنجیره‌ی سینماتیکی باز است تا به کمک آن دو نشان‌گر دستگاه مختصات محلی در صفحه تعریف شود.



از مجهولات گردایان گرفته شده و با مساوی صفر قرار دادن آن‌ها، مجهولات محاسبه شده است (روابط ۵ و ۶).

در ادامه با استفاده از روش گرایان، مجهولات مساله محاسبه شده است. برای این منظور ابتدا از تابع هزینه نسبت به هر یک

$$\frac{\partial J}{\partial x_c} = 2a_1(a_1x_c + b_1y_c + c_1) + 2a_2(a_2x_c + b_2y_c + c_2) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial J}{\partial y_c} = 2b_1(a_1x_c + b_1y_c + c_1) + 2b_2(a_2x_c + b_2y_c + c_2) = 0 \quad (6)$$

در ادامه با حل دستگاه ایجاد شده، x_c و y_c به دست آمده است (روابط ۷ و ۸).

$$x_c = \frac{1}{2} \frac{(y_1 - y_3)((x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)) + (y_2 - y_1)((x_3^2 + y_3^2) - (x_1^2 + y_1^2))}{(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) + (y_1 - y_3)(x_2 - x_1)} \quad (7)$$

$$y_c = \frac{1}{2} \frac{(x_1 - x_3)((x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)) + (x_2 - x_1)((x_3^2 + y_3^2) - (x_1^2 + y_1^2))}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + (x_1 - x_3)(y_2 - y_1)} \quad (8)$$

آن بهترین مرکز دوران، مجموع مربعات خطا نسبت به متوسط فاصله به عنوان تابع هزینه تعریف شده (رابطه‌ی ۹) و هزینه‌ی هر یک از نقاط ناحیه محاسبه شده است.

در روش برازش دایره، به موقعیت حداقل یک نشان‌گر در سه لحظه نیاز است. این سه لحظه می‌توانند متوالی و یا غیرمتوالی بوده و انتخاب آن‌ها می‌تواند به اشکال مختلفی انجام شود.

$$J\left(\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^3 (r_p - distance_p(n))^2 \quad (9)$$

با اجرای الگوریتم، دایره‌ای که هزینه‌ی کم‌تری دارد (دارای کم‌ترین اختلاف با نقاط ثبت شده) به عنوان بهترین برازش دایره انتخاب شده و مرکز آن به عنوان بهترین مرکز دوران گزارش شده است.

۲-۱-۲- حل با روش بهینه‌سازی

در صورتی که تعداد نقاط ثبت شده بیش از سه عدد باشد تعداد روابط (۳-۱) افزایش یافته، تعداد مجهولات روی عدد ۳ ثابت مانده و دستگاه دارای جواب تحلیلی نیست. در این حالت جواب بهینه بر مبنای کم‌ترین مربعات خطا جست‌وجو و ارائه می‌شود. با روش جست‌وجوی مستقیم، دایره‌ی بهینه به موقعیت نشان‌گرها برازش شده و مرکز آن به عنوان تخمینی از مرکز دوران ارائه شده است. ابتدا با گسسته‌سازی فضا و در نظر گرفتن هر یک از نقاط این ناحیه به عنوان کاندید مرکز دوران $\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$ ، فاصله‌ی نقاط تا موقعیت نشان‌گرها محاسبه شده است. فاصله‌ی نقطه‌ی n -ام تا نقطه‌ی کاندید مرکز دوران به صورت زیر است.

$$distance_p(n) = \left| \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{A_n} \\ y_{A_n} \end{bmatrix} \right|$$

میانگین فواصل به عنوان شعاع دایره (r_p) نیز به شکل زیر است.

$$r_p = \frac{\sum_{n=1}^3 distance_p(n)}{3}$$

در نتیجه به تعداد نقاط ناحیه‌ی گسسته‌سازی شده از فضا، دایره به دست خواهد آمد. برای تعیین بهترین دایره و در پی

۲-۲- تحلیل خطا

۲-۲-۱- بررسی عمل‌کرد الگوریتم حل تحلیلی برازش دایره بدون وجود خطای اندازه‌گیری

برای بررسی و صحت‌سنجی حل تحلیلی برازش دایره، در ابتدا فرض شده که داده‌های اندازه‌گیری شده دقیق و بدون خطای اندازه‌گیری است.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_2, \quad \tilde{x}_3 = x_3 \\ \tilde{y}_1 &= y_1, \quad \tilde{y}_2 = y_2, \quad \tilde{y}_3 = y_3 \end{aligned}$$

با جای‌گذاری مقادیر اندازه‌گیری شده در روابط (۷) و (۸)، موقعیت مرکز دوران برای داده‌های بدون خطا محاسبه شده است.

$$\hat{x} = \frac{1}{2} \frac{(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_3)((\tilde{x}_2^2 + \tilde{y}_2^2) - (\tilde{x}_1^2 + \tilde{y}_1^2)) + (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1)((\tilde{x}_3^2 + \tilde{y}_3^2) - (\tilde{x}_1^2 + \tilde{y}_1^2))}{(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1)(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1) + (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_3)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)} \quad (10)$$

$$\hat{y} = \frac{1}{2} \frac{(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3)((\tilde{x}_2^2 + \tilde{y}_2^2) - (\tilde{x}_1^2 + \tilde{y}_1^2)) + (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)((\tilde{x}_3^2 + \tilde{y}_3^2) - (\tilde{x}_1^2 + \tilde{y}_1^2))}{(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_1) + (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3)(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1)} \quad (11)$$



فرض شده است که داده‌های اندازه‌گیری شده، مقادیر واقعی نقاط به همراه خطای اندازه‌گیری باشد یعنی در نهایت برای محاسبه‌ی مرکز دوران، مقادیر نقاط $[\tilde{x}_1]$ ، $[\tilde{x}_2]$ و $[\tilde{x}_3]$ به همراه $[\tilde{y}_1]$ ، $[\tilde{y}_2]$ و $[\tilde{y}_3]$ به همراه خطا در دسترس باشد.

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_1 + \varepsilon_{x1} = r_A \cos(\theta_1) + \varepsilon_{x1} \\ \tilde{y}_1 &= y_1 + \varepsilon_{y1} = r_A \sin(\theta_1) + \varepsilon_{y1} \\ \tilde{x}_2 &= x_2 + \varepsilon_{x2} = r_A \cos(\theta_2) + \varepsilon_{x2} \\ \tilde{y}_2 &= y_2 + \varepsilon_{y2} = r_A \sin(\theta_2) + \varepsilon_{y2} \\ \tilde{x}_3 &= x_3 + \varepsilon_{x3} = r_A \cos(\theta_3) + \varepsilon_{x3} \\ \tilde{y}_3 &= y_3 + \varepsilon_{y3} = r_A \sin(\theta_3) + \varepsilon_{y3}\end{aligned}$$

در ادامه برای محاسبه‌ی مرکز دوران، مقادیر اندازه‌گیری شده در روابط (۷) و (۸) جای‌گذاری شده است.

با توجه به فرضیات در نظر گرفته شده در این بخش، صورت هر دو کسر در روابط (۱۰) و (۱۱) برابر با صفر بوده و مبدا مختصات به عنوان مرکز دوران به دست آمده است. بنابراین در شرایطی که داده‌های اندازه‌گیری شده دقیق باشد، الگوریتم جواب دقیقی خواهد داشت.

۲-۲-۲- خطای تخمین حل تحلیلی

برای این منظور ابتدا مختصات نقاط به صورت قطبی در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned}A_1 &= r_A \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \\ A_2 &= r_A \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \\ A_3 &= r_A \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \left(-2r_A^2 (\varepsilon_{x1} (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_3)) + \varepsilon_{x2} (-\cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_3)) \right. \\ &\quad + \varepsilon_{x3} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_1) - \cos(\theta_3) \sin(\theta_2)) + \varepsilon_{y1} (\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_3)) \\ &\quad + \varepsilon_{y2} (-\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)) + \varepsilon_{y3} (\sin(\theta_1) \sin(\theta_3) - \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)) \\ &\quad + 2r_A ((\varepsilon_{y1} - \varepsilon_{y3})(\varepsilon_{x2} \cos(\theta_2) + \varepsilon_{y2} \sin(\theta_2)) + (\varepsilon_{y3} - \varepsilon_{y2})(\varepsilon_{x1} \cos(\theta_1) + \varepsilon_{y1} \sin(\theta_1)) \\ &\quad \left. + (\varepsilon_{y2} - \varepsilon_{y1})(\varepsilon_{x3} \cos(\theta_3) + \varepsilon_{y3} \sin(\theta_3))) \right) \\ &\quad / 2r_A (\varepsilon_{y1} (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_3)) + \varepsilon_{y2} (\cos(\theta_3) - \cos(\theta_1)) + \varepsilon_{y3} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) \\ &\quad + \varepsilon_{x1} (\sin(\theta_3) - \sin(\theta_2)) + \varepsilon_{x2} (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_3)) - \varepsilon_{x3} (\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)) \\ &\quad + r_A \sin(\theta_1 - \theta_2) - r_A \sin(\theta_1 - \theta_3) + r_A \sin(\theta_2 - \theta_3))\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \left(2r_A^2 (\varepsilon_{x1} (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \cos(\theta_1) \cos(\theta_3)) + \varepsilon_{x2} (-\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)) \right. \\ &\quad + \varepsilon_{x3} (\cos(\theta_1) \cos(\theta_3) - \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)) + \varepsilon_{y1} (\cos(\theta_2) \sin(\theta_1) - \cos(\theta_3) \sin(\theta_1)) \\ &\quad + \varepsilon_{y2} (-\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_3) \sin(\theta_2)) + \varepsilon_{y3} (\cos(\theta_1) \sin(\theta_3) - \cos(\theta_2) \sin(\theta_3)) \\ &\quad + 2r_A ((\varepsilon_{x1} - \varepsilon_{x3})(\varepsilon_{x2} \cos(\theta_2) + \varepsilon_{y2} \sin(\theta_2)) + (\varepsilon_{x3} - \varepsilon_{x2})(\varepsilon_{x1} \cos(\theta_1) + \varepsilon_{y1} \sin(\theta_1)) \\ &\quad \left. + (\varepsilon_{x2} - \varepsilon_{x1})(\varepsilon_{x3} \cos(\theta_3) + \varepsilon_{y3} \sin(\theta_3))) \right) \\ &\quad / 2r_A (\varepsilon_{y1} (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_3)) + \varepsilon_{y2} (\cos(\theta_3) - \cos(\theta_1)) + \varepsilon_{y3} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) \\ &\quad + \varepsilon_{x1} (\sin(\theta_3) - \sin(\theta_2)) + \varepsilon_{x2} (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_3)) - \varepsilon_{x3} (\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)) \\ &\quad + r_A \sin(\theta_1 - \theta_2) - r_A \sin(\theta_1 - \theta_3) + r_A \sin(\theta_2 - \theta_3))\end{aligned} \quad (13)$$

۲-۲-۳- بررسی انحراف از معیار \hat{x} در حل تحلیلی

در این بخش امید ریاضی \hat{x}^2 با دو فرض گوسی بودن توزیع احتمالی تمام خطاها و کوچک بودن خطاها نسبت به مقادیر r و θ تخمین زده شده است. بنابراین در محاسبات بعدی جملات با خطاهای مرتبه‌ی یک در صورت و خطاهای مرتبه‌ی صفر در مخرج در نظر گرفته شده و از آوردن خطا با مرتبه‌ی بالاتر که مقادیر بسیار کوچکی دارند، صرف نظر شده است.

$$\begin{aligned}\hat{x} &= -(\varepsilon_{x1} (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_3)) \\ &\quad + \varepsilon_{x2} (-\cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_3)) \\ &\quad + \varepsilon_{x3} (\cos(\theta_3) \sin(\theta_1) - \cos(\theta_3) \sin(\theta_2)) \\ &\quad + \varepsilon_{y1} (\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_3)) \\ &\quad + \varepsilon_{y2} (-\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)) \\ &\quad + \varepsilon_{y3} (\sin(\theta_1) \sin(\theta_3) - \sin(\theta_2) \sin(\theta_3)) \\ &\quad / (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))\end{aligned}$$

روابط (۱۲) و (۱۳) مقدار تخمین مرکز دوران را نشان می‌دهند. از آنجا که مبدا مختصات به عنوان محل دقیق مرکز دوران فرض شده است، دو رابطه‌ی (۱۲) و (۱۳) مقدار خطای تخمین را به ترتیب در راستای x و y نشان می‌دهند. اگر مقادیر خطا نسبت به مقدار r و θ کوچک باشند، مخرج کسرها با جمله‌ی با خطای مرتبه‌ی صفر برابر می‌شود. در واقع مخرج کسر با عبارت زیر برابر شده که اگر سه نقطه‌ی مختلف در اختیار باشد، این عبارت برابر با صفر نخواهد شد.

$$2r_A^2 (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

در صورت کسر جملات دارای خطای مرتبه‌ی صفر وجود ندارد. بنابراین اگر خطاها به صفر میل کند، تخمین موقعیت مرکز دوران نیز به صفر میل خواهد کرد.

به صورت مشابه برای \hat{y} نیز روابط زیر برقرار است.

$$E[\hat{y}^2] = (\sigma_x^2 (\cos^2(\theta_1) (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_3))^2 + \cos^2(\theta_2) (\cos(\theta_3) - \cos(\theta_1))^2 + \cos^2(\theta_3) (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))^2) + \sigma_y^2 (\sin^2(\theta_1) (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_3))^2 + \sin^2(\theta_2) (\cos(\theta_3) - \cos(\theta_1))^2 + \sin^2(\theta_3) (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))^2) / (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))^2$$

انحراف از معیار فاصله‌ی نقطه‌ی $[\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$ (مرکز دوران به دست آمده از داده‌ی غیردقیق) تا مبدا (محل دقیق مرکز دوران) به صورت زیر است.

$$E[\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2] = E[\tilde{x}^2] + E[\tilde{y}^2] = 2(\sigma_x^2 (\cos^2(\theta_1) (1 - \cos(\theta_2 - \theta_3)) + \cos^2(\theta_2) (1 - \cos(\theta_1 - \theta_3)) + \cos^2(\theta_3) (1 - \cos(\theta_2 - \theta_1))) + \sigma_y^2 (\sin^2(\theta_1) (1 - \cos(\theta_2 - \theta_3)) + \sin^2(\theta_2) (1 - \cos(\theta_1 - \theta_3)) + \sin^2(\theta_3) (1 - \cos(\theta_2 - \theta_1))) / (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))^2$$

اگر انحراف از معیار خطای اندازه‌گیری در راستاهای مختلف و تمام لحظات یکسان باشد (روابط زیر).

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_{x_3} = \sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \sigma_{y_3} = \sigma$$

آن‌گاه روابط زیر برقرار است.

$$E[\hat{x}^2] = \sigma^2 ((\sin(\theta_2) - \sin(\theta_3))^2 + (\sin(\theta_3) - \sin(\theta_1))^2 + (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2))^2) / (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))^2$$

به صورت مشابه برای \hat{y} نیز روابط زیر برقرار است.

$$E[\hat{y}^2] = \sigma^2 ((\cos(\theta_2) - \cos(\theta_3))^2 + (\cos(\theta_3) - \cos(\theta_1))^2 + (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))^2) / (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))^2$$

در نهایت انحراف از معیار فاصله‌ی نقطه‌ی $[\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$ تا مبدا به صورت رابطه‌ی (۱۴) است.

$$E[\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2] = E[\tilde{x}^2] + E[\tilde{y}^2] = 2\sigma^2 (3 - \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_3) + \cos(\theta_2 - \theta_3)) / (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))^2 \quad (14)$$

اگر فرض شود که زاویه‌ی دوران بین هر لحظه برابر با σ باشد.

$$\theta_2 = \theta_1 + \alpha \quad \theta_3 = \theta_2 + \alpha = \theta_1 + 2\alpha$$

به این ترتیب برای انحراف از معیار رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$E[\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2] = \sigma^2 \frac{(\cos(\alpha) + 2)}{(\cos(\alpha) - 1)^2 (\cos(\alpha) + 1)} \quad (14)$$

مربع صورت کسر \hat{x} از جملاتی شامل مربع خطا و ضرب دو خطا تشکیل شده است. با توجه به این که خطاها از یکدیگر مستقل فرض شده و توزیع آن‌ها نیز نرمال (گوسی) در نظر گرفته شده، امید ریاضی جملات شامل ضرب دو خطا، برابر با صفر است. از آن‌جا که عمل‌گر امید ریاضی یک عمل‌گر خطی روی متغیرهای تصادفی بوده، امید ریاضی صورت کسر \hat{x} با مجموع امید ریاضی مربع هر یک از ۶ جمله‌ی صورت برابر است.

$$E[\hat{x}^2] = E[(\varepsilon_{x_1}^2 (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_3))^2 + \varepsilon_{x_2}^2 (-\cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_3))^2 + \varepsilon_{x_3}^2 (\cos(\theta_3) \sin(\theta_1) - \cos(\theta_3) \sin(\theta_2))^2 + \varepsilon_{y_1}^2 (\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_3))^2 + \varepsilon_{y_2}^2 (-\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_2) \sin(\theta_3))^2 + \varepsilon_{y_3}^2 (\sin(\theta_1) \sin(\theta_3) - \sin(\theta_2) \sin(\theta_3))^2) / (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))^2] = ((\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_3))^2 E[\varepsilon_{x_1}^2] + (-\cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_3))^2 E[\varepsilon_{x_2}^2] + (\cos(\theta_3) \sin(\theta_1) - \cos(\theta_3) \sin(\theta_2))^2 E[\varepsilon_{x_3}^2] + (\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_3))^2 E[\varepsilon_{y_1}^2] + (-\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_2) \sin(\theta_3))^2 E[\varepsilon_{y_2}^2] + (\sin(\theta_1) \sin(\theta_3) - \sin(\theta_2) \sin(\theta_3))^2 E[\varepsilon_{y_3}^2]) / (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))^2 = (\sigma_{x_1}^2 (\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_3))^2 + \sigma_{x_2}^2 (-\cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_3))^2 + \sigma_{x_3}^2 (\cos(\theta_3) \sin(\theta_1) - \cos(\theta_3) \sin(\theta_2))^2 + \sigma_{y_1}^2 (\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_3))^2 + \sigma_{y_2}^2 (-\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_2) \sin(\theta_3))^2 + \sigma_{y_3}^2 (\sin(\theta_1) \sin(\theta_3) - \sin(\theta_2) \sin(\theta_3))^2) / (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))^2$$

اگر انحراف از معیار خطای اندازه‌گیری در هر لحظه یکسان باشد (روابط زیر).

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{y_1} = \sigma_1 \quad \sigma_{x_2} = \sigma_{y_2} = \sigma_2 \quad \sigma_{x_3} = \sigma_{y_3} = \sigma_3$$

آن‌گاه روابط زیر برقرار است.

$$E[\hat{x}^2] = (\sigma_1^2 (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_3))^2 + \sigma_2^2 (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_3))^2 + \sigma_3^2 (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2))^2) / (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))^2$$

اگر انحراف از معیار خطای اندازه‌گیری در هر راستا یکسان باشد (روابط زیر).

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_{x_3} = \sigma_x \quad \sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \sigma_{y_3} = \sigma_y$$

آن‌گاه روابط زیر برقرار است.

$$E[\hat{x}^2] = (\sigma_x^2 (\cos^2(\theta_1) (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_3))^2 + \cos^2(\theta_2) (\sin(\theta_3) - \sin(\theta_1))^2 + \cos^2(\theta_3) (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2))^2) + \sigma_y^2 (\sin^2(\theta_1) (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_3))^2 + \sin^2(\theta_2) (\sin(\theta_3) - \sin(\theta_1))^2 + \sin^2(\theta_3) (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2))^2) / (\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3))^2$$



۲-۲-۴- تحلیل خطای عددی

به منظور بررسی الگوریتم برازش دایره و مقایسه با خطای تحلیلی انجام شده، تحلیل خطای عددی با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده صورت گرفته است. از آنجا که داده‌های اندازه‌گیری همواره با خطا همراه هستند، برای نزدیک‌تر بودن داده‌های شبیه‌سازی شده به داده‌ی واقعی، این داده‌ها نیز با خطا در نظر گرفته شده است.

در داده‌های شبیه‌سازی شده، مانند شکل (۱) فرض شده است که جسم صلبی نسبت به مرکز دوران ثابت دوران کرده و موقعیت نشان‌گری از این جسم در هر لحظه ثبت می‌شود. هم‌چنین در هر لحظه به موقعیت نشان‌گر خطایی اعمال شده که این خطا با توزیع گوسی و میانگین صفر ($\mu=0$) و انحراف از معیارهای لازم در هر بخش در نظر گرفته شده است.

برای تحلیل عددی خطا در ادامه با تغییر هر یک از متغیرهای مساله، زاویه‌ی دوران (α)، فاصله‌ی مارکرها نسبت به مرکز دوران (r) و انحراف معیار خطا (σ)، موقعیت مرکز آنی دوران حاصل از داده‌های همراه با خطا به صورت عددی در سه فریم متوالی و برای ۱۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی شده و مقدار خطای جذر میانگین مربعات^۱ محاسبه شده است.

۳- یافته‌ها و بحث

با توجه به بیان ماتریسی میزان خطا به صورت دو به دو برای پارامترهای مساله، ضریب همبستگی دوبعدی برای بررسی میزان همبستگی بین خطای تخمین به دست آمده با استفاده از روش‌های حل عددی و تحلیلی محاسبه شده و برای زوج پارامترهای انحراف از معیار خطا-زاویه‌ی دوران، انحراف از معیار خطا-فاصله از مرکز دوران، و زاویه‌ی دوران-فاصله از مرکز دوران در جدول (۱) ارائه شده است. همان‌طور که در جدول (۱) مشاهده می‌شود، میزان همبستگی موجود بین روش تحلیلی و تحلیل خطای آن، بسیار نزدیک به ۱ است. این همبستگی قدرتمند را می‌توان در شکل (۲) نیز مشاهده کرد. وجود همبستگی بالا بین روش تحلیلی و تحلیل خطای آن، صحت تحلیل خطا را در این روش به اثبات می‌رساند. اگر چه در این مطالعه فرایند تحلیل خطا برای روش بهینه‌سازی انجام نشده، اما همبستگی آن با روش تحلیلی بررسی شده است. بر اساس نتایج به دست آمده، دو روش تحلیلی و بهینه‌سازی در سه فاکتور σ ، α و r همبستگی بالایی با هم دارند. البته در فاکتور α این رابطه مقداری تضعیف شده است اما باز هم می‌توان میزان همبستگی را بالا در نظر گرفت.

جدول (۱)- ضریب همبستگی دوبعدی بین روش حل تحلیلی با تحلیل خطای آن و حل بهینه‌سازی در میزان خطای تخمین موقعیت مرکز دوران

پارامتر	تحلیلی Vs خطای تحلیل روش تحلیلی	تحلیلی Vs بهینه‌سازی
$\sigma - \alpha$	۰/۹۹	۰/۷۸
$\sigma - r$	۰/۹۹	۰/۹۸
$\alpha - r$	۰/۹۹	۰/۹۴

بر اساس خطای تحلیلی طبق رابطه‌ی (۱۵) مقدار خطا در محاسبه‌ی مرکز دوران به انحراف از معیار خطای سیستم داده‌برداری (σ) و سینوس و کسینوس زاویه‌ی دوران (α) بستگی دارد. هم‌چنین نتایج نشان می‌دهد که اگر نسبت خطای سیستم اندازه‌گیری به فاصله‌ی نشان‌گر از مرکز دوران (r) ناچیز باشد، خطای حاصل هیچ وابستگی به این فاصله نداشته و تغییر آن تأثیری بر مقدار خطا ندارد.

در تحلیل عددی خطا برای بررسی میزان تأثیر هر یک از پارامترها بر خطای نهایی موقعیت مرکز دوران، سه پارامتر σ ، α و r به صورت دو به دو با یکدیگر بررسی شده است. برای این منظور دامنه‌ی تغییرات انحراف از معیار خطای سیستم داده‌برداری بین صفر تا ۱/۵ سانتی‌متر، دامنه‌ی تغییرات زاویه‌ی دوران بین صفر تا ۱۸۰ درجه و برای فاصله‌ی نشان‌گر تا مرکز دوران بین ۱۰ تا ۶۰ سانتی‌متر تعیین شده است.

علاوه بر بررسی تأثیر تغییر هر یک از سه پارامتر بر میزان خطای تخمین موقعیت مرکز دوران، مقایسه‌ی نیز بین روش حل تحلیلی با نتیجه‌ی رابطه‌ی خطای تحلیلی این روش (رابطه‌ی (۱۵) صورت گرفته است. در نهایت برای شناسایی بهترین و کم‌خطاترین روش حل عددی برای تخمین موقعیت مرکز دوران، مقایسه‌ی بین دو روش حل تحلیلی و بهینه‌سازی انجام شده است (شکل ۲).

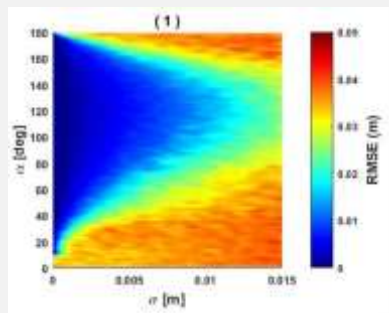
خطای تخمین موقعیت مرکز دوران با تغییرات زاویه‌ی دوران (α) و انحراف از معیار خطای سیستم داده‌برداری (σ) در نمودارهای ۱ تا ۳ شکل (۲) نشان داده شده است. میزان اثرگذاری دو فاکتور σ و r بر تغییرات خطای تخمین نیز در نمودارهای ۴ تا ۶ شکل (۲) قابل مشاهده است. بر این اساس در روش حل تحلیلی (شکل ۲ نمودار ۵) با افزایش σ ، خطای نهایی نیز به صورت خطی افزایش یافته است. در روش بهینه‌سازی اثر σ بر خطای تخمین متفاوت است. همان‌طور که در نمودار ۴ شکل (۲) مشاهده می‌شود، تغییر طیف رنگی از چپ به راست، خطی و یک‌نواخت نیست. قابل مشاهده است که

^۱ Root Mean Square Error

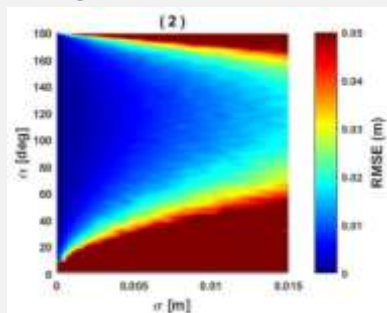
تأثیر محسوسی بر میزان خطای تخمین بگذارد. به طور کلی مقادیر σ همبستگی بالایی با فرایند داده‌برداری حرکتی دارند. این خطا می‌تواند ناشی از دقت پایین سیستم داده‌برداری، عدم کالیبراسیون دقیق سیستم و رفتار غیرصلب پوست حین استفاده از سیستم‌های استریوفتوگرامتری باشد. با کنترل خطای سیستم داده‌برداری می‌توان خطای تخمین مرکز دوران را به کم‌تر از ۱ میلی‌متر رساند (شکل ۲ نمودار ۱-۶).

در مقادیر اندک σ ، خطا مقداری بیش از روش تحلیلی (شکل ۲ نمودار ۵) بوده اما با افزایش σ ، شیب خطا در روش بهینه‌سازی کم شده است. بر این اساس بسته به مقادیر σ ، می‌توان از بین دو روش حل تحلیلی و بهینه‌سازی گزینه‌ی مناسب را برای تخمین موقعیت مرکز دوران انتخاب کرد. البته شایان ذکر است که مقادیر خطای حاصل از σ در بین روش‌های تحلیلی و بهینه‌سازی تفاوت قابل توجهی نداشته و نمی‌تواند

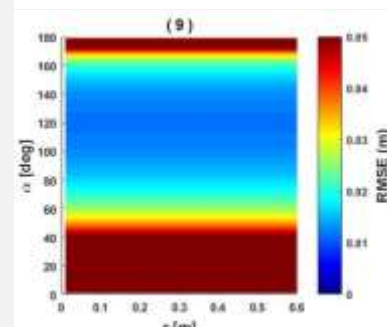
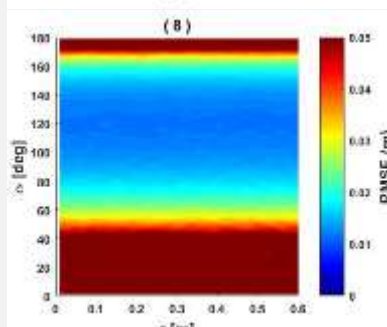
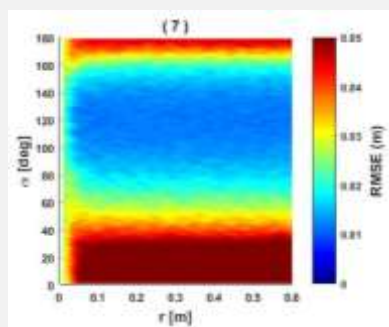
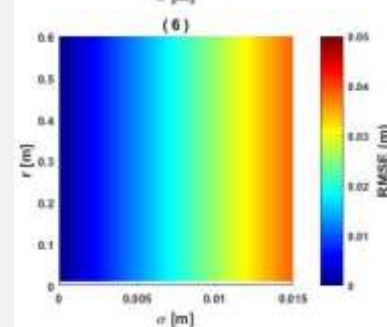
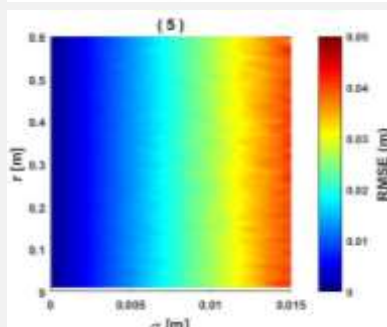
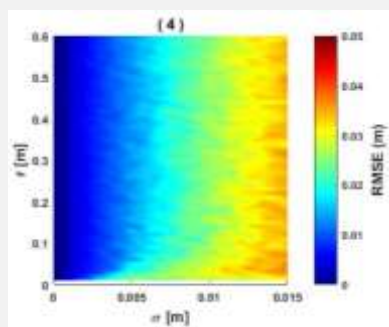
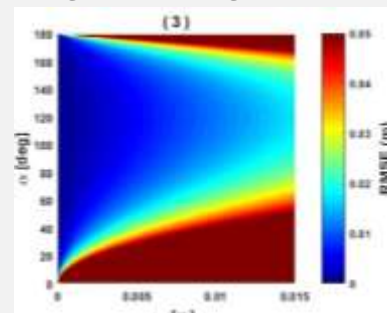
حل عددی - با روش بهینه‌سازی



حل عددی - با روش تحلیلی



خطای تحلیلی روش حل تحلیلی



شکل (۲) - نقشه‌ی حرارتی تابعیت خطای تخمین از سه پارامتر انحراف از معیار خطای سیستم داده‌برداری (σ)، زاویه‌ی دوران (α) و فاصله‌ی نشان‌گر از مرکز دوران (r) در دو روش حل تحلیلی و حل بهینه‌سازی و خطای تحلیل روش حل تحلیلی در شناسایی موقعیت مرکز دوران با روش برازش دایره؛ بعد سوم که به صورت نقشه‌ی حرارتی نشان داده شده بیان‌گر مقدار RMS خطای تخمین است؛ سطر اول تابعیت خطا از دو پارامتر انحراف از معیار خطای داده‌برداری و زاویه‌ی دوران، سطر دوم تابعیت خطا از دو پارامتر انحراف از معیار خطا و فاصله‌ی نشان‌گر از مرکز دوران و سطر سوم تابعیت خطا از دو پارامتر فاصله‌ی نشان‌گر از مرکز دوران و زاویه‌ی دوران را نشان می‌دهد؛ بازه‌ی تغییرات سه پارامتر به صورت $r=[0/1-0/6]$ ، $\alpha=[0-180]$ و $\sigma=[0-0/15]$ بوده و در هر نمودار یک پارامتر ثابت است ($\sigma=0/1$ و $\alpha=60$ ، $r=0/2$)

نهایی تخمین موقعیت مرکز دوران کاهش می‌یابد. هم‌چنین با افزایش و کاهش زاویه‌ی دوران نسبت به این محدوده، خطای نهایی مجدداً افزایش می‌یابد. قابل مشاهده است که مقادیر خطا در دو زاویه‌ی صفر و ۱۸۰ درجه به بی‌نهایت میل می‌کند. دلیل

زاویه‌ی دوران (α) پارامتر دیگری است که تأثیر مستقیمی بر میزان خطای تخمین مرکز دوران با روش عمل‌کردی برازش دایره دارد. همان‌طور که در شکل ۲ نمودارهای ۱ تا ۳ و ۷ تا ۹ مشاهده می‌شود، با رساندن α به محدوده‌ی ۱۲۰ درجه، خطای



یکی دیگر از فاکتورهایی که در پروتکل‌های مارکرگذاری برای تحلیل سینماتیکی حرکات انسان و ربات مد نظر قرار می‌گیرد، موقعیت نشان‌گر نسبت به مفصل است. در این مقاله میزان تاثیر فاصله‌ی نشان‌گر تا مرکز دوران (r) مورد بررسی قرار گرفته است. مطابق رابطه‌ی (۱۵) خطای تخمین مرکز دوران، رابطه‌ای با فاصله‌ی نشان‌گر تا مرکز مفصل ندارد. با جای‌گذاری داده‌های شبیه‌سازی شده در هر دو الگوریتم برازش دایره (روش‌های تحلیلی و بهینه‌سازی)، تاثیر مقادیر (r) در میزان خطای نهایی موقعیت مرکز دوران بررسی شده است. مطابق شکل (۲) نمودار ۸، در روش حل تحلیلی، تغییر مقادیر r تاثیری در مقدار خطای نهایی ندارد. رابطه‌ی r و خطا در روش بهینه‌سازی، بسیار مشابه روند حل تحلیلی است اما طبق نمودارهای ۴ و ۷ شکل (۲)، در فواصل نزدیک به مرکز دوران، مقادیر خطا سریع‌تر افزایش می‌یابد. قابل مشاهده است که در فواصل بیش از ۲ تا ۳ سانتی‌متر، اثرگذاری موقعیت نشان‌گر بر میزان خطا در روش بهینه‌سازی نیز کم‌رنگ می‌شود. طبق فرضیات این پژوهش، وجود تفاوت نسبی اندک بین انحراف از معیار سیستم داده‌برداری و فاصله‌ی نشان‌گر تا مرکز دوران، منجر به افزایش خطا می‌شود. بر این اساس در صورتی که نسبت σ به r ناچیز باشد، r تاثیری در خطای نهایی نخواهد داشت.

یکی از مهم‌ترین محدودیت‌های این مطالعه تحلیل صفحه‌ای حرکات است. روش ارائه شده مخصوص حرکات صفحه‌ای بوده و بازسازی حرکتی که محدود به تنها یک صفحه نیستند با خطا همراه می‌شود. این الگوریتم قابل توسعه به حرکات سه‌بعدی نیز می‌باشد. محور دوران با مرکز دوران جایگزین شده و به جای تطبیق دایره، پوسته‌ی کره به مکان هندسی مارکرها در فضا برازش می‌شود. محدودیت دیگر این روش، وابستگی یافتن مرکز دوران به حرکت نسبی دو عضو دو سمت مفصل است. مطابق نتایج به دست آمده، زاویه‌ی دوران نشان‌گر (ها) روی خطای تخمین تاثیر داشته و در حرکات کم‌دامنه تخمین با خطای قابل توجه همراه می‌شود. یک روش برای حل این مشکل، اجرای یک پروتکل داده‌برداری پیرامون در ابتدای هر مرحله‌ی داده‌برداری برای یافتن موقعیت مفاصل از دید دستگاه‌های مختصات محلی است. هم‌چنین در صورتی که تعداد نشان‌گرها و تعداد فریم‌های داده‌برداری زیاد باشد، زمان قابل توجهی برای بازسازی حرکت به روش بهینه‌سازی صرف می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری

در این مطالعه برازش دایره به عنوان روشی مناسب برای یافتن مرکز آنی دوران و به دنبال آن بازسازی حرکت معرفی شده و

این مساله یکی بودن موقعیت نشان‌گر در لحظات مختلف است و لزوم بهره‌گیری از حداقل سه لحظه‌ی متفاوت برای اجرای الگوریتم برازش دایره را مشخص می‌کند.

طبق تئوری نایکوئیست در تبدیل سیگنال آنالوگ به دیجیتال، فرکانس داده‌برداری باید حداقل دو برابر فرکانس سیگنال باشد تا یک سیگنال پیوسته بازسازی شود [۱۵]. بر این اساس در تحلیل بیومکانیکی حرکات اگر داده‌برداری با فرکانس بالاتری انجام شود، امکان بررسی حرکات با جزئیات بیشتر فراهم می‌شود. با توجه به رابطه‌ی معکوس خطا و زاویه‌ی دوران، افزایش فرکانس داده‌برداری باعث افزایش خطا می‌شود که عمده‌ترین مشکل بازسازی حرکت با روش‌های عمل‌کردی است [۱۶-۱۸]. در یک مطالعه میزان خطای تخمین مرکز دوران با روش‌های عمل‌کردی بررسی شده و طبق نتایج آن در صورت اعمال نویز به موقعیت نشان‌گرها، میزان خطا در دامنه‌ی حرکتی کم‌تر از ۲۰ درجه برابر با ۱ سانتی‌متر بوده و در صورت افزایش دامنه‌ی حرکتی به بیش از ۴۵ درجه، امکان کاهش خطا به ۳ میلی‌متر وجود دارد [۱۶]. با استفاده از روش‌های عمل‌کردی خطای تخمین موقعیت مرکز دوران مفصل هیپ در دامنه‌ی حرکتی ۱۵ تا ۳۰ درجه برابر با ۴ تا ۹ میلی‌متر برآورد شده است [۱۷]. محققان دیگری نیز در این زمینه به نتایج مشابهی رسیده‌اند [۱۸]. نکته‌ای که در این مطالعات مغفول مانده، عدم اعلام مقادیر نویز سیستم داده‌برداری (σ) است. طبق رابطه‌ی (۱۵) مقادیر نویز سیستم تاثیر بسیار زیادی در میزان خطای تخمین دارد. طبق نمودارهای ۱ و ۲ در شکل (۲)، با کاهش σ به کم‌تر از ۱ میلی‌متر می‌توان با انتخاب مقادیر α در حدود ۱۰ درجه، خطایی کم‌تر از ۲ میلی‌متر را به دست آورد. معمولاً در تحلیل سینماتیکی حرکات انسان، بسته به سرعت انجام حرکات از دوربین‌های سرعت بالا استفاده شده تا جزئیات حرکت بررسی شود. انتخاب زاویه‌ی دوران کوچک، تکرار سیکل و میانگین‌گیری از مقادیر، از روش‌هایی است که با آن می‌توان بدون از دست دادن جزئیات حرکت، دقت مطلوبی را نیز کسب کرد. در روش حل تحلیلی با وجود تکرار ۱۰۰۰ مرتبه‌ای فرایند و میانگین‌گیری از آن برای شبیه‌سازی مرکز دوران (شکل ۲ نمودار ۲)، نتایج شبیه‌سازی در $\alpha < 10^\circ$ ، خطای بسیار زیادی ($> 0.5^\circ$) را به همراه داشته است. بر این اساس استفاده از روش حل تحلیلی حتی با وجود مقادیر بسیار اندک σ نمی‌تواند تخمین مناسبی از موقعیت مرکز دوران در مقادیر کوچک α ارائه دهد. در نقطه‌ی مقابل با استفاده از روش بهینه‌سازی می‌توان مقادیر α را بسیار به صفر نزدیک کرد و در صورت داشتن σ مناسب، خطایی کم‌تر از ۱ میلی‌متر را به دست آورد.

- bones during movement: anatomical frame definition and determination,” *Clinical biomechanics*, vol. 10, no. 4, pp. 171-178, June, 1995.
- [7] H. De Rosario, & A. Besa, “Analytical study of the effects of soft tissue artefacts on functional techniques to define axes of rotation,” *Journal of biomechanics*, vol. 62, pp. 60-67, Sept., 2017.
- [8] R. Stagni, A. Leardini, A. Cappozzo, M.G. Benedetti, & A. Cappello, “Effects of hip joint center mislocation on gait analysis results,” *Journal of biomechanics*, vol. 33, no. 11, pp. 1479-1487, November, 2000.
- [9] Song, J., Ding, H., Han, W., Wang, J., & Wang, G. (2018). An X-ray-free method to accurately identify the elbow flexion-extension axis for the placement of a hinged external fixator. *International journal of computer assisted radiology and surgery*, 13(3), 375-387.
- [10] Galetto, M., Gastaldi, L., Lisco, G., Mastrogiacomo, L., & Pastorelli, S. (2014). Accuracy evaluation of a new stereophotogrammetry-based functional method for joint kinematic analysis in biomechanics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, 228(11), 1183-1192.
- [11] Gastaldi, L., Lisco, G., & Pastarelli, S. (2015). Evaluation of functional methods for human movement modelling. *Acta of bioengineering and biomechanics*, 17(4), 31-38.
- [12] K. Halvorsen, “Bias compensated least squares estimate of the center of rotation,” *Journal of Biomechanics*, vol. 36, no. 7, pp. 999-1008, July, 2003.
- [13] F. Reuleaux, “Theoretische Kinematik: Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens,” *References are to the 1963*.
- [14] J. J. Spiegelman, & S. L. Y. Woo, “A rigid-body method for finding centers of rotation and angular displacements of planar joint motion,” *Journal of biomechanics*, vol. 20, no. 7, pp. 715-721, January, 1987.
- [15] W.H. Glenn, “Noise in interferometric optical systems: An optical Nyquist theorem,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 25, no. 6, pp. 1218-1224, June, 1989.
- [16] R.M. Ehrig, W.R. Taylor, & M.O. Heller, “A survey of formal methods for determining the center of rotation of ball joints,” *Journal of Biomechanics*, vol. 39, no. 15, pp. 2798-2809, January, 2006.
- [17] S.J. Piazza, N. Okita, & P.R. Cavanagh, “Accuracy of the functional method of hip joint center location: effects of limited motion and varied implementation,” *Journal of Biomechanics*, vol. 34, no. 7, pp. 967-973, July, 2001.
- [18] V. Camomilla, A. Cereatti, G. Vannozzi, & A. Cappozzo, “An optimized protocol for hip joint center determination using the functional method,” *Journal of Biomechanics*, vol. 39, no. 6, pp. 1096-1106, January, 2006.

نحوه‌ی محاسبه‌ی مرکز دوران با استفاده از آن فرموله شده است. در این روش موقعیت مرکز دوران نسبی بین دو لینک با استفاده از دو روش تحلیلی و بهینه‌سازی محاسبه شده و به عنوان تخمینی از محل مفصل ارائه شده است.

به منظور ارزیابی روش، تحلیل خطا به دو روش تحلیلی و عددی انجام شده و عوامل موثر در خطای تخمین موقعیت مرکز دوران مانند انحراف از معیار خطای سیستم داده‌برداری (σ)، زاویه‌ی دوران (α) و فاصله‌ی نشان‌گر از مرکز دوران (r) مورد بررسی قرار گرفته است. این مطالعه روش جدیدی را برای بازسازی حرکت معرفی کرده که لزوم نصب دقیق مارکر روی نشانه‌های آناتومیک مفاصل را از بین برده و می‌تواند زمینه‌ساز تحولی جدید در داده‌برداری حرکتی برای بازسازی حرکات باشد. از بین دو روش حل تحلیلی و بهینه‌سازی مورد بررسی در این مطالعه، روش بهینه‌سازی با توجه به دقت تخمین مطلوب‌تر در زوایای دوران اندک، تاثیرپذیری کمتر در مقادیر بالای σ و سرعت بالا در حل مساله، می‌تواند در مطالعات بیومکانیکی برای بازسازی حرکات انسان مورد توجه قرار گیرد. در مطالعات آینده، روش‌های افزایش دقت تخمین مرکز دوران در روش برازش دایره مورد بررسی قرار خواهد گرفت، داده‌های واقعی در این روش جای‌گذاری خواهد شد و نتایج حاصل با روش‌های هندسی مانند تقاطع عمود منصف‌ها مقایسه خواهد شد.

۵- مراجع

- [1] E. Chruscikowski, N.R. Fry, J.J. Nobel, M. Gough, & A.P. Shortland, “Selective motor control correlates with gait abnormality in children with cerebral palsy,” *Gait & posture*, vol. 52, pp.107-109, February, 2017
- [2] E. van Hal, E. Otten, J.M. Hijmans, & K. Postema, “A new leg prosthesis to improve lateral balance in prosthetic walking,” *Gait & Posture*, vol. 42, pp. S81-S82, June, 2015.
- [3] M. Attias, A. Bonnefoy-Mazure, L. Cheze, G. DeCoulon, & S. Armand, “Feasibility and reproducibility of using an exoskeleton able to emulate muscle contractures during walking,” *Gait & Posture*, vol. 42, pp. S82-S83, June, 2015.
- [4] J. Condell & G. Moore, (2009). “HandPuppet3D: Motion capture and analysis for character animation,” *Artificial Intelligence Review*, vol 31, no. (1-4), pp. 45, June, 2009.
- [5] C.G.M. Meskers, F.C. Van der Helm, L.A. Rozendaal, & P. M. Rozing, “In vivo estimation of the glenohumeral joint rotation center from scapular bony landmarks by linear regression,” *Journal of biomechanics*, vol. 31, no. 1, pp. 93-96, November, 1997.
- [6] A. Cappozzo, F. Catani, U. Della Croce, & A. Leardini, “Position and orientation in space of