



Analysis of Fractional Order SEIR Model for Covid 19 and Investigation of its Spread Management with a Novel Adaptive Fractional Order Nonlinear Controller

Veisi, Amir¹ / Delavari, Hadi^{2*}

¹ - M.Sc. Student, Department of Electrical Engineering, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran

² - Associate Professor, Department of Electrical Engineering, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran

ARTICLE INFO

DOI: 10.22041/IJBME.2021.523157.1662

Received: 15 January 2021

Revised: 26 April 2021

Accepted: 20 May 2021

KEY WORDS

Covid 19
Fractional Order SEIR Model
Fractional Calculus
Sliding Mode Control
Fractional Adaptation Law

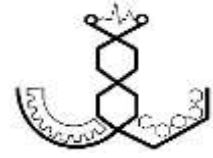
ABSTRACT

Coronavirus, or Covid 19, is a contagious disease caused by the coronavirus and is a threat to the health and economy of countries. Although vaccine production and distribution are currently underway, but non-pharmacological interventions are still being implemented as an important and fundamental strategy to control the spread of the virus in countries around the world. Now, according to the existing conditions, having a suitable dynamic model of this disease will provide information to the relevant authorities about the behavior, prevalence, speed of transmission, and other parameters. Various mathematical modeling methods have been proposed to analyze the transmission patterns of this new disease. In this paper, using fractional calculus, the dynamics of Covid 19 will be investigated. One of the major advantages of fractional calculus, which can be very effective in modeling and controlling epidemics, is its long-term memory property. With a dynamic model of virus transmission and prevalence, focusing on a control strategy based on non-pharmacological interventions can be important. In this paper, a new adaptive fractional order sliding mode controller is proposed for non-pharmacological decisions. The proposed method in this paper for controlling non-pharmacological interventions is an adaptive fractional order active sliding mode control, which can have a good performance due to its robustness against parameter uncertainty and system disturbances.

***Corresponding Author**

Address	Department of Electrical Engineering, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran		
Postal Code	6516913733	Tel	+98-81-38411541
E-Mail	delavari@hut.ac.ir	Fax	+98-81-38411528





تحلیل مدل مرتبه‌ی کسری SEIR برای کووید ۱۹ و بررسی مدیریت شیوع آن با یک کنترل کننده‌ی غیر خطی مرتبه‌ی کسری تطبیقی جدید

ویسی، امیر^۱ / دلاوری، هادی^{۲*}

^۱ - دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی برق، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران

^۲ - دانشیار، گروه مهندسی برق، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران

مشخصات مقاله

شناسه‌ی دیجیتال: 10.22041/IJBME.2021.523157.1662

پذیرش: ۳۰ اردیبهشت ۱۴۰۰

بازنگری: ۶ اردیبهشت ۱۴۰۰

ثبت در سامانه: ۲۶ دی ۱۳۹۹

چکیده

واژه‌های کلیدی

بیماری کرونا ویروس یا کووید ۱۹ یک بیماری واگیردار بوده که توسط ویروس کرونا ایجاد شده و یک تهدید و نگرانی برای سلامت و اقتصاد کشورها است. اگرچه تولید و توزیع واکسن این بیماری هم اکنون در حال انجام است اما مداخلات غیردارویی هم‌چنان به عنوان یک استراتژی مهم و اساسی برای کنترل شیوع این ویروس در کشورهای جهان در حال اجرا می‌باشد. هم اکنون با توجه به شرایط موجود، داشتن یک مدل دینامیکی مناسب از این بیماری، اطلاعاتی را در مورد نحوه‌ی رفتار، شیوع، سرعت انتقال و سایر پارامترها در اختیار قرار خواهد داد. روش‌های مختلف مدل‌سازی ریاضی برای تجزیه و تحلیل الگوهای انتقال این بیماری جدید پیشنهاد شده است. در این مقاله با استفاده از حسابان کسری، دینامیک کووید ۱۹ مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از مزیت‌های مهم حسابان کسری که می‌تواند در مدل‌سازی و کنترل بیماری‌های همه‌گیر بسیار کارآمد باشد، داشتن حافظه‌ی بلندمدت است. با داشتن مدل دینامیکی انتقال و شیوع ویروس، تمرکز بر یک استراتژی کنترلی بر اساس مداخلات غیردارویی می‌تواند حائز اهمیت باشد. در این مقاله یک روش کنترل مد لغزشی مرتبه‌ی کسری تطبیقی جدید جهت اتخاذ تصمیمات غیردارویی پیشنهاد شده است. روش پیشنهادی در این مقاله جهت کنترل مداخلات غیردارویی، یک کنترل کننده‌ی مد لغزشی فعال مرتبه‌ی کسری تطبیقی جدید است که به دلیل مقاوم بودن در برابر نامعینی‌های پارامتری و اغتشاشات سیستم می‌تواند عمل کرد مناسبی داشته باشد.

کووید ۱۹

مدل مرتبه‌ی کسری SEIR

حسابان کسری

کنترل کننده‌ی مد لغزشی

قانون تطبیق مرتبه‌ی کسری

*نویسنده‌ی مسئول

نشانی

گروه مهندسی برق، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران

کد پستی

۶۵۱۶۹۱۳۷۳۳

تلفن

+۹۸-۸۱-۳۸۴۱۱۵۴۱

پست الکترونیک

delavari@hut.ac.ir

دورنگار

+۹۸-۸۱-۳۸۴۱۱۵۲۸



۱- مقدمه

بیماری ویروس کرونا (کووید ۱۹) یک بیماری ویروسی بسیار مسری بوده که تا به امروز میلیون‌ها انسان را تحت تاثیر قرار داده و باعث مرگ‌های زیادی در سراسر جهان شده است. سازمان بهداشت جهانی^۱ این بیماری را کووید ۱۹ نام‌گذاری کرده است. به دلیل سرعت بالای انتشار کووید ۱۹ در جهان و ناآگاهی و عدم شناخت جوامع بشری در ابتدای شیوع ویروس، یکی از پیامدهای انتشار این ویروس ایجاد بحران‌های اجتماعی و نابسامانی‌های اقتصادی در کشورهای درگیر بوده است. این بحران در سراسر جهان باعث شده است که سازمان بهداشت جهانی ویروس کووید ۱۹ را یک ویروس همه‌گیر جهانی اعلام کند [۱]. اگرچه هم‌اکنون ساخت و توزیع واکسن و داروها برای درمان این بیماری در حال انجام است اما همچنان تعیین تکنیک‌هایی متمرکز بر مداخلات غیردارویی به عنوان یک استراتژی مهم برای کنترل شیوع و کاهش ویروس در کشورهای مختلف در حال اجرا می‌باشد. در این میان اقداماتی مانند منع آمد و شد، رعایت فاصله‌ی اجتماعی، تعطیلی مراکز اجتماعی و غیره جهت کنترل، مدیریت و اشباع نشدن امکانات بهداشتی اتخاذ گردیده است. استراتژی‌های اتخاذ شده در کشورهای متفاوت جهت کنترل شیوع از طریق مداخلات غیردارویی شامل تعطیلی مدارس، دانشگاه‌ها، مشاغل غیرضروری و غیره بوده است [۲]. این بیماری بسیار مسری است و از طریق قطره‌های ترشح شده از بینی هنگام سرفه یا عطسه از فرد آلوده در محیط پخش می‌شود. به طور معمول، از زمان ورود بیماری اولیه ۵ تا ۶ روز طول می‌کشد تا علائم نشان داده شود اما ممکن است که این زمان تا ۱۴ روز به طول بیانجامد [۳].

چند مدل پیشنهادی برای تجزیه و تحلیل و پیش‌بینی بیماری کووید ۱۹ در بسیاری از کشورها اعمال شده است [۴-۷]. مدل ریاضی یکی از اساسی‌ترین عوامل موثر در تحلیل مداخلات غیردارویی است. به طور خاص، روش‌های مختلفی برای مساله‌ی طراحی سیاست‌های مداخلات غیردارویی تحت محدودیت‌ها با استفاده از ابزارهای تئوری کنترل ارائه شده است. در مقاله‌ی [۸] جهت مدیریت مداخلات غیردارویی روش کنترل بهینه مورد استفاده قرار گرفته که در آن میزان انتقال بیماری از اشیای آلوده نیز در نظر گرفته شده است. در مقالات [۹] و [۱۰] از کنترل بهینه جهت کاهش میزان افراد مبتلا در سطح جامعه و کاهش نرخ انتقال بین افراد استفاده شده است. استفاده از کنترل کننده‌های خطی مانند کنترل کننده‌ی تناسبی جهت کاهش و محدودسازی تعداد افراد بستری در

بیمارستان‌ها در مقاله‌ی [۱۱] بررسی شده است. جهت اتخاذ تصمیم درست در مورد میزان اعمال محدودیت‌های قرنطینه، بررسی‌هایی در مقالات [۱۲] و [۱۳] انجام شده است. روش کنترل بهینه با هدف کاهش تابع هزینه‌ی اجتماعی-اقتصادی در اتخاذ تصمیمات قرنطینه می‌تواند بسیار کارآمد باشد [۱۴]. یکی از معضلات اساسی در مورد شیوع اپیدمی، اشباع شدن امکانات بیمارستانی است. در مقاله‌ی [۱۵] کنترل کننده‌ی بنگ‌بنگ جهت مدیریت تخت‌های بیمارستانی با دانستن اطلاعاتی از قبیل تعداد افراد آلوده بررسی شده است. جهت طراحی استراتژی‌های واکسیناسیون از کنترل کننده‌ی مد لغزشی در مقالات [۱۶-۱۸] استفاده شده است. در پژوهش [۱۹] یک روش بهینه‌سازی برای مداخلات غیردارویی طراحی شده است. جهت کاهش افراد در معرض، از کنترل کننده‌ی مد لغزشی در مقاله‌ی [۲۰] استفاده شده است.

اولین بار مطالعه‌ی پویایی شیوع بیماری‌ها با مطالعه‌ی دینامیک آبله آغاز شده و پس از آن مدل‌سازی ریاضی شیوع بیماری‌ها مورد توجه قرار گرفته است [۲۱]. پس از شیوع بیماری طاعون در هند، مدل SIR معرفی شده و مورد توجه قرار گرفته است [۲۱]. مدل SIR جامعه را به سه دسته‌ی مستعد، مبتلا و متوفی تقسیم‌بندی می‌کند [۲۲]. دوره‌های نهفتگی بیماری یکی از اساسی‌ترین پارامترهای مدل است. مدل‌های جدید معمولاً به چهار دسته‌ی مستعد، در معرض، مبتلا و متوفی تقسیم شده که $E(t)$ بیان‌گر افراد در معرض جامعه است. با توجه به دوره‌ی نهفتگی بیماری، فرد بیمار در جامعه باعث انتقال بیماری شده که می‌توان این دسته از اشخاص را به عنوان گروه در معرض معرفی کرد که با $E(t)$ تعریف می‌شود [۲۳-۲۷]. در مقالات [۲۶] و [۲۷] دینامیک مدل شیوع ویروس به بخش‌های بیش‌تری تعمیم داده شده و پارامتر قرنطینه نیز محاسبه شده است. معمولاً از دو تکنیک مرتبه‌ی صحیح و حسابان کسری جهت مدل‌سازی رفتار شیوع بیماری‌های واگیردار استفاده می‌شود که تحقیقات و بررسی‌های انجام شده نشان داده است که مدل‌های مرتبه‌ی کسری [۲۸-۳۰] به دلیل دارا بودن ویژگی حافظه‌ی بلندمدت، دقت بالایی در مدل‌سازی دارند.

در مقاله‌ی [۳۱] یک مدل مرتبه‌ی کسری بر اساس تعریف کپوتو-فابریزیو برای شیوع بیماری کرونا ارائه شده که کاملاً متفاوت با مدل پیشنهادی مقاله‌ی حاضر است. در مقاله‌ی [۳۱] عمل کرد مدل ارائه شده در ضرایب متفاوت مرتبه‌ی کسری با مدل واقعی شیوع بیماری، جهت یافتن بهترین مقدار مرتبه‌ی کسری مورد مطالعه قرار گرفته و همچنین در انتها از یک روش

^۱ World Health Organization (WHO)

در این رابطه n اولین عدد مرتبه‌ی صحیح بزرگ‌تر از α است. تعریف انتگرال مرتبه‌ی کسری نیز به صورت زیر است [۳۲].

$$I_{a,t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = D_{0,t}^{-\alpha} f(t) \quad (3)$$

تئوری ۱

اگر تابع $x(t) \in \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر پیوسته و حقیقی و $\mu = (m/n) \geq 1$ باشد که $m > 0$ عدد فرد و $n \in \mathbb{N}^+$ است، آن‌گاه رابطه‌ی (۴) برای بازه‌ی زمانی $t \geq a$ برقرار است [۳۳].

$${}^C D_{a,t}^{\alpha} x^{\mu}(t) \leq \mu x^{\mu-1}(t) {}^C D_{a,t}^{\alpha} x(t), \quad \forall \alpha \in (0,1) \quad (4)$$

تئوری ۲

اگر سیستم ${}^C D_{a,t}^{\alpha} x(t) = f(x,t)$ یک سیستم غیرخطی مرتبه‌ی کسری با نقطه‌ی تعادل $x=0$ و دامنه‌ی $D \subset \mathbb{R}^n$ که شامل مبدا نیز می‌شود باشد، آن‌گاه $V(x(t),t): [0,\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر و پیوسته بوده که نسبت به متغیر x لپشیتز است و در شرایط (۵) و (۶) صدق می‌کند.

$$\alpha_1 \|x\|^a \leq V(x(t),t) \leq \alpha_2 \|x\|^{ab} \quad (5)$$

$${}^C D_{a,t}^{\alpha} V(x(t),t) \leq -\alpha_3 \|x\|^{ab} \quad (6)$$

در این روابط $\alpha \in (0,1)$ ، $x \in D$ و $t \geq 0$ بوده، ثابت‌های $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و a مثبت و دل‌خواه انتخاب شده و آن‌گاه $x=0$ پایدار میتگ-لفر است و اگر روابط (۵) و (۶) به طور کلی در فضای \mathbb{R}^n برقرار باشند، سیستم پایدار میتگ-لفر سراسری می‌باشد [۳۴].

۳- مدل شیوع بیماری و بیان مساله

۳-۱- مدل اپیدمیولوژیک SEIR مرتبه‌ی کسری

چهار قسمت اصلی مدل SEIR شامل افراد مستعد جامعه^۳ $S(t)$ ، افراد در معرض^۴ $E(t)$ ، مبتلایان^۵ $I(t)$ و فوت شدگان در اثر بیماری^۶ $R(t)$ است. میزان ارتباط افراد مستعد جامعه با مبتلایان با پارامتر β معرفی شده است [۳۵]. درصدی از افراد مستعد پس از گذشت زمان به گروه افراد در معرض انتقال پیدا کرده در نتیجه درصدی از افراد در معرض را می‌توان با معادله‌ی $(\beta I(t)/N)S(t)$ نشان داد که شامل ضریبی از انتقال بیماری بوده که افراد مستعد ممکن است با این ضریب به بیماری مبتلا شوند و این دسته از افراد در گروه افراد در معرض قرار می‌گیرند. در کل افراد در معرض را می‌توان به افرادی که با بیماری تماس داشته اما هنوز مبتلا نشده‌اند تعریف کرد. افراد قرار گرفته در

ساده‌ی کنترل بهینه مبتنی بر الگوریتم ژنتیک با بهره‌گیری از تولباکس الگوریتم ژنتیک MATLAB استفاده شده است.

در مقاله‌ی حاضر از مدل مرتبه‌ی کسری^۱ SEIR استفاده شده است. هدف این مقاله کنترل میزان تخت‌های مراقبت‌های ویژه‌ی بیمارستانی درگیر با این بیماری است. در این مقاله روش مد لغزشی با حسابان کسری و قوانین تطبیقی ترکیب شده است. روش حسابان کسری دارای مزیت‌هایی هم‌چون افزایش ناحیه‌ی پایداری، مقاوم بودن در برابر نامعینی‌ها-اغتشاشات داخلی، حافظه‌ی بلندمدت و غیره است. با توجه به ویژگی‌ها و مزیت‌های بیان شده، در این مقاله یک روش کنترل مد لغزشی فعال مرتبه‌ی کسری تطبیقی جدید پیشنهاد شده است.

در ادامه در بخش ۲ تعاریف پایه در حسابان کسری مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۳ مدل شیوع بیماری و بیان مساله ارائه شده که در آن در ابتدا به بررسی مدل شیوع مرتبه‌ی کسری بیماری پرداخته شده و در ادامه هدف بیان مساله و طرح چالش موجود در مقابله با شیوع بیماری ارائه شده است. استراتژی کنترلی پیشنهادی و تحلیل پایداری در بخش ۴ ارائه شده است. در بخش ۵ نتایج شبیه‌سازی برای مدل مرتبه‌ی کسری و هم‌چنین استراتژی‌های مختلف کنترلی ارائه شده و در پایان نتیجه‌گیری در بخش ۶ انجام شده است.

۲- تعاریف پایه در حسابان کسری

حسابان کسری شکل کلی تری از حسابان مرتبه‌ی صحیح است. در این روش مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری توسط اپراتور اساسی ${}_a D_t^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) تعریف شده که در آن α و t محدوده‌ها هستند. اپراتور مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۲].

$${}_a D_t^{\alpha} = \begin{cases} \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} & \text{Re}(\alpha) > 0 \\ 1 & \text{Re}(\alpha) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{\alpha} & \text{Re}(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

تعاریف مختلفی برای مشتق مرتبه‌ی کسری ارائه شده که یکی از پرکاربردترین آن‌ها در مسائل مهندسی تعریف کپوتو^۲ است. این تعریف بر حسب مرتبه‌ی α به صورت زیر است.

$${}^C D_{a,t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-n+1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (2)$$

$$n-1 < \alpha < n$$

^۳ Exposed

^۴ Infected

^۵ Removed

^۱ Susceptible-Exposed-Infectious-Removed

^۲ Caputo

^۳ Susceptible

یافته و امکانات پزشکی در یک بازه‌ی زمانی خاص به حد اشباع نرسد. بر این اساس می‌توان محدودیت زیر را تنظیم کرد.

$$I(t) \leq I_{max} \quad (11)$$

در این رابطه I_{max} بیان‌گر میزان سطح بیشینه‌ی امکانات بهداشتی-درمانی بوده که در این‌جا میزان تخت‌های موجود در بخش مراقبت‌های ویژه‌ی بیمارستانی تعریف شده که از طرف مسئولین بهداشتی هر کشور اعلام شده است. اکنون طراحی $u(t)$ به عنوان سیاست مداخلات غیردارویی مورد نیاز است. با توجه به این‌که $u(t) \in [U_{min}, U_{max}]$ یک عمل‌کرد متغیر با زمان است، می‌تواند با توجه به تکامل زمان بیماری اعمال شود.

۴- استراتژی کنترلی پیشنهادی و تحلیل پایداری

هدف از ارائه‌ی کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی، اندازه‌گیری تعداد افراد مبتلا در جامعه و کنترل آن جهت محدود کردن بیماران از حد بیشینه‌ی امکانات بهداشتی-درمانی است که با اعمال $u(t)$ (سیگنال کنترلی درصد قرنطینه) به مدل سیستم شیوع بیماری، این خواسته فراهم خواهد شد. در واقع سیگنال کنترلی با توجه به روش پیشنهادی محاسبه شده و به دست می‌آید که این ایده باعث تحقق محدودیت (۱۱) و کاهش خطر افول سیستم‌های مراقبت‌های بهداشتی خواهد شد. بر اساس مطالب فوق خطا را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۱۲) تعریف کرد.

$$e(t) = I_{max} - I(t) \quad (12)$$

یک سطح لغزش مرتبه‌ی کسری به صورت رابطه‌ی (۱۳) پیشنهاد می‌شود.

$$\sigma(t) = e(t) + \tau D^\alpha e(t) \quad (13)$$

در این رابطه $\tau > 0$ و عددی ثابت بوده و α مرتبه‌ی کسری است. قانون کنترلی پیشنهادی به صورت رابطه‌ی (۱۴) است.

$$u(t) = \begin{cases} U_{min}, & \text{if } \sigma(t) > 0, I(t) < I_{max} \\ U_{max}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

فرض می‌شود که سیستم از $I_0 < I_{max}$ شروع شده و از آن‌جا که $\sigma(t) > 0$ است، $u(t) = U_{min}$ اعمال می‌شود. برای یافتن قانون کنترل، از سطح لغزش تعیین شده مشتق مرتبه‌ی کسری گرفته شده و مساوی با صفر قرار داده می‌شود.

$$D^\alpha \sigma(t) = (\tau\gamma - 1)D^\alpha I(t) - \tau\lambda D^\alpha E(t) \quad (15)$$

گروه در معرض پس از گذشت دوره‌ی نهفتگی بیماری و با بروز علائم ویروس به دسته‌ی افراد مبتلا اضافه می‌شوند. دوره‌ی نهفتگی بیماری در این مقاله با پارامتر λ معرفی شده که بیان‌گر زمان دوره‌ی نهفتگی بیماری است. در واقع پس از گذشت زمان متوسط $1/\lambda$ روز، فرد در معرض به بخش مبتلایان (آلوده شده) منتقل خواهد شد. به همین ترتیب درصدی از افراد مبتلا پس از گذشت یک زمان متوسط به بخش متوفی انتقال پیدا کرده که این زمان با پارامتر $1/\gamma$ معرفی شده است. جهت کاهش میزان شیوع بیماری باید میزان ارتباط بین افراد مستعد و مبتلایان در سطح جامعه کاهش یابد. از این رو β می‌تواند با $(1 - \beta)u(t)$ در شرایط $u(t) \in [U_{min}, U_{max}]$ و $0 \leq U_{min} < U_{max} \leq 1$ این فرمول باعث ایجاد مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل شده که به صورت مرتبه‌ی کسری پیشنهاد شده است.

$$D^\alpha S(t) = -\frac{(1 - u(t))\beta S(t)I(t)}{N} \quad (7)$$

$$D^\alpha E(t) = \frac{(1 - u(t))\beta S(t)I(t)}{N} - \lambda E(t) \quad (8)$$

$$D^\alpha I(t) = \lambda E(t) - \gamma I(t) \quad (9)$$

$$D^\alpha R(t) = \gamma I(t) \quad (10)$$

بنابراین در این مدل‌سازی کل جمعیت از مجموع افراد مستعد، در معرض، مبتلا و متوفی حاصل خواهد شد (N). مرتبه‌ی کسری این مدل $\alpha = 0.95$ انتخاب شده که نحوه‌ی محاسبه‌ی آن در قسمت شبیه‌سازی توضیح داده شده است. پارامتر اساسی و مهم جهت تصمیم‌گیری در راستای مداخلات غیردارویی $u(t)$ بوده که از طریق روش کنترلی پیشنهادی در زمان‌های متفاوت محاسبه و به سیستم اعمال شده است. این پارامتر بر اساس درصد بوده که می‌توان از آن به عنوان میزان درصد قرنطینه و محدودیت‌های اجتماعی نام برد.

۳-۲- بیان مسأله

با توجه به سرعت بالای انتقال شیوع بیماری، اگر در یک بازه‌ی زمانی مشخص و کوتاه تعداد افراد مبتلا در جامعه از یک حد بیشینه‌ی تعیین شده‌ی امکانات بهداشتی و درمانی یک جامعه فراتر رود، مشکلاتی مانند اشباع تخت‌های بیمارستانی، کاهش راندمان عمل‌کرد کادر درمان، نارضایتی جامعه از کمبود امکانات بهداشتی و غیره باعث ایجاد چالش‌های سنگینی شده که عواقب و پیامدهای نامطلوبی خواهد داشت. در نتیجه ممکن است تعداد مرگ و میر به طور چشم‌گیری افزایش یابد، لذا در کشورهای مختلف استراتژی‌های متنوعی برای کاهش سرعت انتقال بیماری انجام شده است تا سرعت انتقال بیماری کاهش

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۱۵) در (۲۱) رابطه‌ی (۲۲) به دست می‌آید.

$$D^\alpha V(t) \leq \sigma(t) \left(-\tau \lambda \left[\frac{(1-u(t))\beta S(t)I(t)}{N} - \lambda E(t) \right] \right) + \Sigma \quad (22)$$

در این رابطه Σ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Sigma = \frac{1}{\xi_1} \tilde{K}_1 D^\alpha \tilde{K}_1 + \frac{1}{\xi_2} \tilde{K}_2 D^\alpha \tilde{K}_2$$

اکنون با جای‌گذاری قانون کنترلی به دست آمده از رابطه‌ی (۱۷) در (۲۲) و با مقداری ساده‌سازی اولیه روابط (۲۳-۲۵) به دست می‌آید.

$$D^\alpha V(t) \leq \sigma(t) \left((\tau\gamma - 1) D^\alpha I(t) - \tau \lambda \left[\frac{\beta S(t)I(t)}{N} (1 - (1 - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} (\tilde{K}_1 \sigma(t) + \tilde{K}_2 \text{sign}(\sigma(t)))) \right) \right] + \Sigma \right) \quad (23)$$

$$D^\alpha V(t) \leq \sigma(t) \left(-\tilde{K}_1 \sigma(t) - \tilde{K}_2 \text{sign}(\sigma(t)) \right) + \Sigma \quad (24)$$

$$D^\alpha V(t) \leq \sigma(t) \left(-\tilde{K}_1 \sigma(t) - \tilde{K}_2 \text{sign}(\sigma(t)) \right) + \frac{1}{\xi_1} \tilde{K}_1 D^\alpha \tilde{K}_1 + \frac{1}{\xi_2} \tilde{K}_2 D^\alpha \tilde{K}_2 \quad (25)$$

در این روابط K یک عدد ثابت و در نتیجه $D^\alpha \tilde{K} = D^\alpha K$ بوده و بنابراین روابط زیر برقرار است.

$$D^\alpha V(t) \leq -\tilde{K}_1 \sigma(t)^2 - \tilde{K}_2 |\sigma(t)| + \frac{1}{\xi_1} (\tilde{K}_1 - K_1) D^\alpha \tilde{K}_1 + \frac{1}{\xi_2} (\tilde{K}_2 - K_2) D^\alpha \tilde{K}_2 \quad (26)$$

$$D^\alpha V(t) \leq -\tilde{K}_1 \sigma(t)^2 - \tilde{K}_2 |\sigma(t)| + \frac{1}{\xi_1} \tilde{K}_1 D^\alpha \tilde{K}_1 - \frac{1}{\xi_1} K_1 D^\alpha \tilde{K}_1 + \frac{1}{\xi_2} \tilde{K}_2 D^\alpha \tilde{K}_2 - \frac{1}{\xi_2} K_2 D^\alpha \tilde{K}_2 \quad (27)$$

با جای‌گذاری قوانین تطبیق رابطه‌ی زیر به دست آمده که با توجه به تئوری (۲) پایداری سیستم حلقه‌ی بسته را تضمین می‌کند.

$$D^\alpha V(t) \leq -K_1 \sigma(t)^2 - K_2 |\sigma(t)| \leq -\eta |\sigma(t)| \quad (28)$$

۵- نتایج شبیه‌سازی

۱-۱- بررسی مدل پیشنهادی

در این قسمت از مقاله ابتدا مدل مرتبه‌ی کسری شیوع ویروس مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و مقدار بهینه‌ی درجه‌ی کسری این سیستم برابر با $\alpha = 0.95$ محاسبه شده است. طبق اطلاعات

با قرار دادن $D^\alpha \sigma(t) = -\tilde{K}_1 \sigma(t) - \tilde{K}_2 \text{sign}(\sigma(t))$ قانون کنترلی کلی به صورت رابطه‌ی (۱۷) به دست خواهد آمد. از آن‌جا که مقدار پارامترهای مدل دینامیکی این ویروس کاملاً شناخته شده نبوده و تنها تخمینی از این پارامترها در دسترس است که خود دارای نامعینی هستند، لذا پارامترهای کنترل کننده یعنی \tilde{K}_1 و \tilde{K}_2 با استفاده از قوانین تطبیقی به دست می‌آیند. با جای‌گذاری روابط (۸) و (۹) در رابطه‌ی (۱۵) و با ساده‌سازی طرفین، رابطه‌ی (۱۶) به دست می‌آید.

$$D^\alpha \sigma(t) = (\tau\gamma - 1) D^\alpha I(t) - \tau \lambda \left[\frac{(1-u(t))\beta S(t)I(t)}{N} - \lambda E(t) \right] = -\tilde{K}_1 \sigma(t) - \tilde{K}_2 \text{sign}(\sigma(t)) \quad (16)$$

قانون کنترلی $u(t)$ را با ساده‌سازی رابطه‌ی (۱۶) می‌توان به صورت رابطه‌ی (۱۷) به دست آورد.

$$u(t) = 1 - \frac{N}{\tau \lambda \beta S(t) I(t)} (\tilde{K}_1 \sigma(t) + \tilde{K}_2 \text{sign}(\sigma(t))) + (\tau\gamma - 1) D^\alpha I(t) + \tau \lambda^2 E(t) \quad (17)$$

در ادامه تجزیه و تحلیل پایداری سیستم انجام شده و قوانین تطبیق برای کنترل کننده‌ی پیشنهادی به دست آمده است.

تئوری ۳

با در نظر گرفتن مدل دینامیکی شیوع بیماری در روابط (۷-۱۰)، اگر سیگنال کنترل (رابطه‌ی ۱۷) با قوانین تطبیق مرتبه‌ی کسری (روابط ۱۸ و ۱۹) اعمال شود، سیستم حلقه‌ی بسته پایدار است.

$$D^\alpha \tilde{K}_1 = \xi_1 \sigma(t)^2 \quad (18)$$

$$D^\alpha \tilde{K}_2 = \xi_2 |\sigma(t)| \quad (19)$$

اثبات

یک تابع لیاپانوف به صورت رابطه‌ی (۲۰) تعریف می‌شود.

$$V(t) = \frac{1}{2} \sigma(t)^2 + \frac{1}{2\xi_1} \tilde{K}_1^2 + \frac{1}{2\xi_2} \tilde{K}_2^2 \quad (20)$$

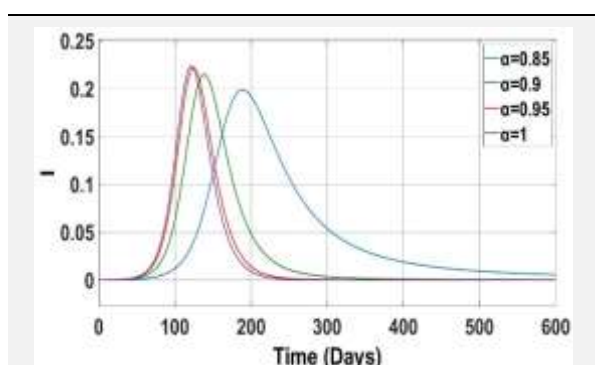
در این رابطه $\tilde{K} = \tilde{K} - K$ در واقع خطای تخمین است. حال با گرفتن مشتق مرتبه‌ی کسری از رابطه‌ی (۲۰) و با توجه به تئوری (۱) رابطه‌ی (۲۱) به دست می‌آید.

$$D^\alpha V(t) \leq \sigma(t) D^\alpha \sigma(t) + \frac{1}{\xi_1} \tilde{K}_1 D^\alpha \tilde{K}_1 + \frac{1}{\xi_2} \tilde{K}_2 D^\alpha \tilde{K}_2 \quad (21)$$

گرفته است. این الگوریتم از رفتار برخی گونه‌های مورچه الهام گرفته شده است. این مورچه‌ها فرمون (نوعی هورمون که مورچه در زمان دنبال کردن مسیر غذا از خود ترشح می‌کند) را روی زمین گذاشته تا مسیر مطلوبی را برای سایر اعضای کلونی ایجاد کنند. این الگوریتم از اوایل دهه‌ی ۱۹۹۰ پیشنهاد شده و مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. در این مقاله جهت یافتن مقدار بهینه‌ی مرتبه‌ی مشتق مرتبه‌ی کسری مدل پیشنهادی از این الگوریتم استفاده شده است. از انتگرال قدرمطلق خطا به عنوان شاخص عمل‌کرد (تابع هزینه) برای تنظیم مرتبه‌ی مشتق کسری مدل پیشنهادی استفاده شده است.

$$IAE = \int |I_{Real-Data} - I| dt \quad (29)$$

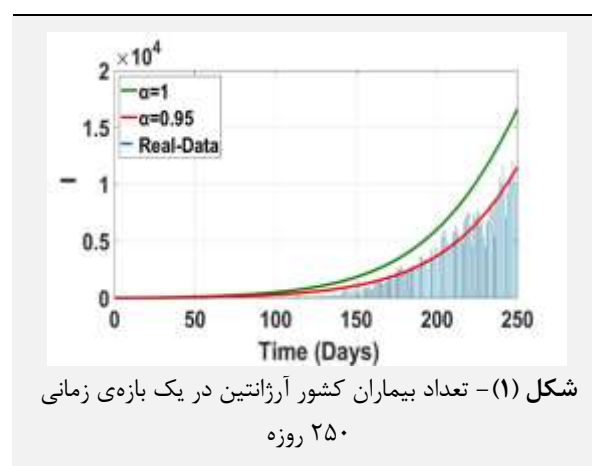
در این رابطه $I_{Real-Data}$ تعداد بیماران گزارش شده‌ی سازمان بهداشت جهانی بر اساس آمار واقعی مبتلایان برای کشور آرژانتین و I خروجی رابطه‌ی (۹) است که در آن پارامتر α توسط این الگوریتم تنظیم می‌شود. پارامترهای این الگوریتم مانند مرز پایین و بالای متغیرها، برای هر کنترل‌کننده با دقت انتخاب شده است. حداکثر تعداد تکرار ۵۰ و تعداد مورچه‌ها ۱۰ در نظر گرفته شده است. شایان ذکر است که این الگوریتم چندین بار اجرا شده تا مقدار بهینه‌ی $\alpha=0.95304$ به دست آمده که جهت سادگی در شبیه‌سازی‌ها و طراحی $\alpha=0.95$ انتخاب شده است. در ادامه جهت بررسی بیش‌تر مدل سیستم بدون اعمال ورودی کنترلی، برای چند مقدار مرتبه‌ی کسری متفاوت شبیه‌سازی و رسم شده است تا با مقدار بهینه‌ی به دست آمده مورد مقایسه‌ی کیفی قرار گیرد.



شکل (۲) - مقایسه‌ی خروجی مدل پیشنهادی، مبتلایان به ازای مرتبه‌های کسری متفاوت

همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده شد مدل مرتبه‌ی کسری با مرتبه‌ی $\alpha=0.95$ نسبت به مدل مرتبه‌ی صحیح ($\alpha=1$) تخمین بسیار بهتری از خود نشان داده است. لذا مدل مرتبه‌ی صحیح

موجود در سازمان بهداشت جهانی، آمار بیماران هر کشور در زمان‌های مشخص در دسترس عموم جامعه قرار داده شده است [۱]. پس از استخراج تعداد بیماران کشور آرژانتین در زمان مشخص، نمودار رشد افراد بیمار در آن کشور در شکل (۱) نشان داده شده که در ادامه از آن با نام اطلاعات واقعی^۱ یاد شده است. در مدل پیشنهادی طبق رابطه‌ی (۹) تعداد بیماران قابل محاسبه است. جهت مقایسه‌ی مدل مرتبه‌ی کسری و مدل مرتبه‌ی صحیح به طور نمونه اطلاعات ۲۵۰ روز از تعداد بیماران کشور آرژانتین استخراج و رسم شده است. در روابط (۷-۱۰) زمانی که $\alpha=1$ باشد مشتق مرتبه‌ی صحیح بوده یعنی $D^1=d/dt$ و مدل مرتبه‌ی صحیح سیستم صادق است. در شکل (۱) خط آبی نشان دهنده‌ی اطلاعات واقعی تعداد بیماران کشور آرژانتین در ۲۵۰ روز بوده که در سایت سازمان بهداشت جهانی موجود است. خط سبز بیان‌گر تعداد بیماران محاسبه شده توسط مدل مرتبه‌ی صحیح بوده اما تعداد بیماران محاسبه شده با مدل مرتبه‌ی صحیح با اطلاعات واقعی از تعداد بیماران، دارای اختلاف چشم‌گیری است. حال با ترسیم تعداد بیماران محاسبه شده با خروجی مدل مرتبه‌ی کسری در رابطه‌ی (۹) با مرتبه‌ی کسری 0.95 (خط قرمز) مشاهده می‌شود که مدل مرتبه‌ی کسری با مرتبه‌ی کسری 0.95 دارای تخمین بهتری از اطلاعات واقعی نسبت به مدل مرتبه‌ی صحیح است. در ادامه نحوه‌ی محاسبه‌ی این درجه‌ی مشتق کسری یعنی $\alpha=0.95$ با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچگان (ACO) توضیح داده شده است.



شکل (۱) - تعداد بیماران کشور آرژانتین در یک بازه‌ی زمانی ۲۵۰ روزه

بهینه‌سازی کلونی مورچه (ACO) به عنوان یک روش بهینه‌سازی مبتنی بر هوش جمعی برای تنظیم درجه‌ی مشتق کسری در مدل پیشنهادی این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است. هوش جمعی یک روش حل مسأله‌ی نسبتاً جدید بوده که بر اساس تعاملات اجتماعی حشرات و سایر حیوانات شکل

^۱ Real-Data

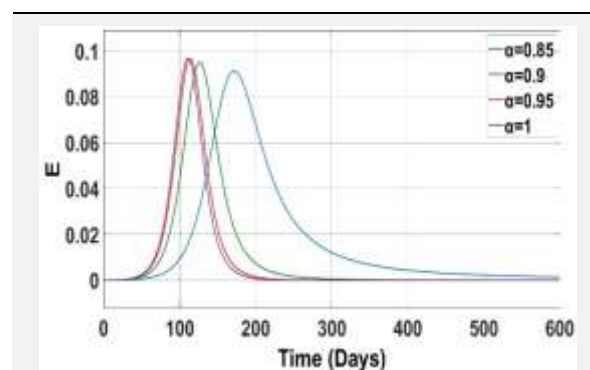
سیگنال ثابت $u(t)$ بررسی شده (اعمال کنترل حلقه‌ی باز) و در مرحله‌ی بعد رفتار کنترل شیوع بیماری تحت اعمال قانون کنترل به دست آمده در رابطه‌ی (۱۷) مورد بررسی قرار گرفته است. در آگوست ۲۰۲۰ میزان تخت‌های موجود در بخش مراقبت‌های ویژه‌ی بیمارستانی توسط دولت آرژانتین برابر با $I_{max}=1/54e5$ اعلام شده است که طبق قانون کنترل به دست آمده، میزان بیماران نباید از این سطح مورد انتظار بیش تر شود. در این مقاله نتایج استراتژی پیشنهادی $AFOSMC^1$ با روش SMC^2 شبیه‌سازی و مقایسه شده است.

۵-۲- بررسی رفتار کنترل کننده‌ی حلقه‌ی باز

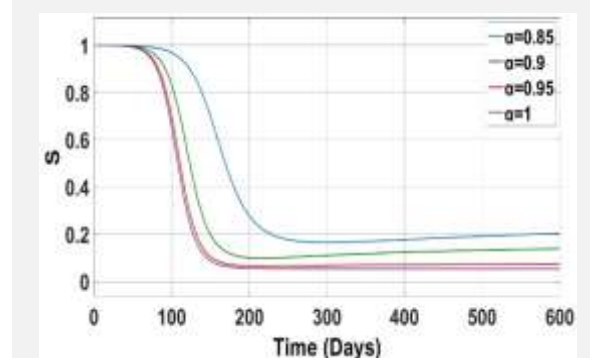
در ابتدا مدیریت حلقه‌ی باز بررسی شده است. در سیستم‌های حلقه‌ی باز هیچ اطلاعاتی از خروجی در میزان ورودی تأثیرگذار نبوده و بدون اندازه‌گیری خروجی مدل، تصمیم برای قرنطینه اتخاذ شده و میزان ورودی ثابت است که مناسب نمی‌باشد. در این قسمت تعدادی از اعمال دستورات قرنطینه‌ی (ورودی $u(t)$) 0% ، 20% ، 40% ، 50% و 100% مورد بررسی قرار گرفته است.

عمل کرد افراد مستعد جامعه پس از اعمال سیگنال‌های ورودی ثابت و متفاوت در شکل (۵) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با اعمال 100% ورودی (اعمال قرنطینه‌ی مطلق و تعطیلی کلیه‌ی فعالیت‌ها در جامعه) میزان افراد مستعد برابر با ۱ است. با توجه به نرمالیزه شدن مقادیر خروجی عدد ۱ به معنی کل جامعه است. در ابتدای شروع ویروس کرونا تمام افراد یک جامعه مستعد مبتلا شدن به بیماری می‌باشند. بنابراین با اعمال 100% قرنطینه‌ی کامل هیچ فردی در جامعه مبتلا نشده و تمام افراد در گروه مستعد باقی می‌مانند. طبیعتاً اعمال قرنطینه‌ی 100% در یک جامعه امکان‌پذیر نیست زیرا باعث ایجاد پیامدهای ناگواری مانند شرایط سخت اقتصادی، اجتماعی و سیاسی می‌شود. در قرنطینه‌ی 0% در زمانی کم‌تر از ۱۵۰ روز تعداد افراد مستعد به صفر میل کرده است بنابراین این ویروس مبتلا شده که در این صورت جامعه و سیستم بهداشتی دچار چالش بزرگی خواهد شد (شکل ۵). با افزایش درصد قرنطینه در جامعه این روند بهبودی بیش‌تری خواهد داشت. میزان سطح افراد در معرض جامعه با اعمال ورودی‌های متفاوت در گذر ۶۰۰ روز با توجه به رابطه‌ی (۸) در شکل (۶) نشان داده شده است. با اعمال 0% قرنطینه و محدودیت در زمانی کم‌تر از ۱۲۰ روز تمام جامعه در معرض ابتلا به این ویروس قرار گرفته که در نتیجه میزان افراد مبتلا نیز افزایش

نمی‌تواند تخمین دقیقی از اطلاعات واقعی داشته باشد، اگرچه در شکل‌های (۲-۴) نمودار مدل مرتبه‌ی صحیح ($\alpha=1$) از سایر مرتبه‌های کسری به نمودار مرتبه‌ی $\alpha=0.95$ نزدیک‌تر بوده اما در مقیاس غیرنرمال در شکل (۱) این اختلاف با اطلاعات واقعی بسیار فاحش است. در ادامه جهت بررسی‌های بیش‌تر، رفتار کیفی مدل به ازای مرتبه‌های کسری متفاوت دیگری شبیه‌سازی شده است. خروجی مدل سیستم برای بیماران به ازای مرتبه‌های کسری 0.85 ، 0.9 ، 0.95 و 1 (مرتبه‌ی صحیح) در شکل (۲) رسم شده است. خط قرمز بیان‌گر مرتبه‌ی کسری 0.95 بوده که در بالا بررسی شده و بهترین رفتار را در تخمین داشته است. خط سبز بیان‌گر مدل مرتبه‌ی کسری به ازای مرتبه‌ی 0.9 بوده که دارای اختلاف زیادی با مرتبه‌ی 0.95 است. خط آبی به ازای مرتبه‌ی 0.85 رسم شده که دارای رفتاری مناسب نبوده و مقدار آن نسبت به 0.95 بسیار زیاد است. هم‌چنین تعداد افراد در معرض و مستعد نیز در شکل‌های (۳) و (۴) رسم شده است.



شکل (۳) - مقایسه‌ی خروجی مدل پیشنهادی، افراد در معرض به ازای مرتبه‌های کسری متفاوت



شکل (۴) - مقایسه‌ی خروجی مدل پیشنهادی، افراد مستعد به ازای مرتبه‌های کسری متفاوت

در ادامه روش‌های مختلف کنترلی روی مدل مرتبه‌ی کسری سیستم اعمال شده است. ابتدا رفتار مدل سیستم تحت اعمال

¹ Sliding Mode Control

² Adaptive Fractional Order Sliding Mode Control

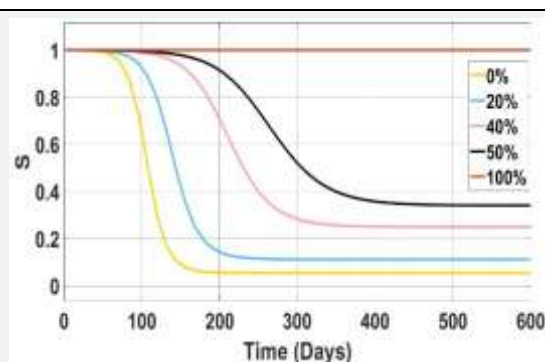
تصمیم برای مدیریت تخت‌های موجود در بخش مراقبت‌های ویژه، تعداد افراد در معرض و مبتلا باید با یک شیب ملایم تغییر کند و تعداد افراد در اوج پیک کم باشد تا امکانات بهداشتی موجود به حد اشباع نرسد و زمان کافی جهت تامین شرایط بهداشتی فراهم شود. در این صورت افراد برای زمان کمی در پیک قرار داشته، تعداد افراد جامعه در پیک شیوع ویروس کم بوده و از این رو جامعه با مشکلاتی از قبیل اشباع تخت‌های بخش مراقبت‌های ویژه مواجه نخواهد شد (شکل‌های ۶ و ۷). با توجه به مطالب ارائه شده در بالا، منطقی‌ترین تصمیم جهت اعمال قرنطینه با تکنیک حلقه‌ی باز میزان ۵۰٪ بوده که تعداد افراد مبتلا در کم‌ترین حالت خود قرار خواهد گرفت (شکل ۷) اما در این روش تصمیم‌گیری اعمال قرنطینه و محدودیت بدون داشتن اطلاعاتی نظیر تعداد افراد مبتلا در هر روز است. به عبارت دیگر تصمیم‌گیری بر اساس روش حلقه‌ی باز (اعمال عددی ثابت در زمان‌های متفاوت) بدون در نظر گرفتن خروجی سیستم غیرمنطقی است. تصمیم‌گیری‌ها زمانی موثرتر خواهد بود که خروجی سیستم نیز در نظر گرفته شده و با توجه به شرایط زمانی متفاوت سیستم تصمیمات کنترلی (درصد قرنطینه) به‌روز شود. به عنوان مثال تحت شرایط متفاوت ممکن است میزان افراد مبتلا در یک بازه‌ی زمانی خاص با سرعت زیادی افزایش یابد، در این صورت اعمال یک قانون محدودیتی ثابت بدون در نظر گرفتن شرایط، عمل کرد نامطلوبی داشته و ممکن است سلامت یک جامعه را با مشکل اساسی مواجه سازد. لذا روش کنترل حلقه‌ی باز به علت نداشتن هیچ‌گونه فیدبک از خروجی نمی‌تواند کارایی و بازده مناسبی داشته باشد و از این رو روش پیشنهادی حلقه‌ی بسته در این مقاله در ادامه مورد شبیه‌سازی قرار گرفته است.

۵-۳- بررسی و مقایسه‌ی رفتار کنترل کننده‌ی

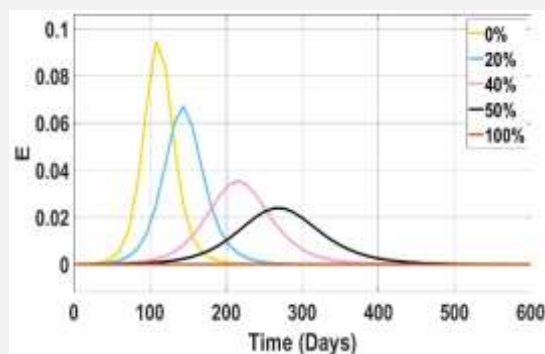
پیشنهادی حلقه‌ی بسته و باز

عمل کرد روش پیشنهادی (AFOSMC) و مقایسه با سیستم حلقه‌ی باز در شکل‌های (۸-۱۰) نشان داده شده است. روش پیشنهادی این مقاله، کنترل کننده‌ی مد لغزشی مرتبه‌ی کسری تطبیقی فعال است. بنابراین طبق تصاویر نشان داده شده می‌توان نتیجه گرفت که تعداد افراد مستعد در سیر زمانی باید با سرعت کم‌تری به صفر میل کند. در این مقاله روش پیشنهادی AFOSMC با روش SMC کلاسیک مقایسه شده است. مطابق شکل‌های (۹) و (۱۰) روش پیشنهادی کنترل دقیق‌تر و مقاوم‌تری داشته است. این روش توانسته است سطح افراد در معرض و مبتلایان جامعه را کاهش دهد و اگر

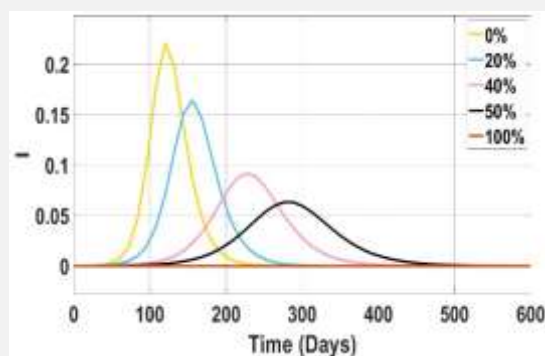
پیدا کرده و مشکلات عمده‌ای را در جامعه به وجود می‌آورد. همان‌طور که در شکل‌های (۵-۷) نشان داده شده اعمال قانون ۵۰ درصدی قرنطینه و محدودیت دارای بهترین نتیجه از افراد مستعد، در معرض و مبتلا بوده است. با توجه به شکل (۶) در صورت اعمال ۵۰٪ محدودیت میزان رشد افراد در معرض با سرعت کمی همراه شده و کم‌ترین میزان افراد در معرض را خواهد داشت. مطابق شکل‌های (۵-۷) با اعمال $u(t)$ از ۰٪ تا ۱۰۰٪ تعداد افراد مبتلا و در معرض کاهش پیدا کرده بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با تغییر ورودی کنترلی $u(t)$ می‌توان سطح تعداد افراد در معرض و مبتلا را کاهش داد که در این میان بهترین تصمیم‌گیری و عمل کرد برای کنترل حلقه‌ی باز سیستم، اعمال ۵۰ درصدی قرنطینه و محدودیت است.



شکل (۵) - سیر زمانی افراد مستعد



شکل (۶) - سیر زمانی افراد در معرض

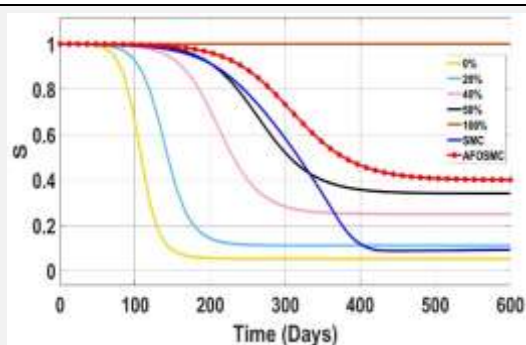


شکل (۷) - سیر زمانی افراد مبتلا

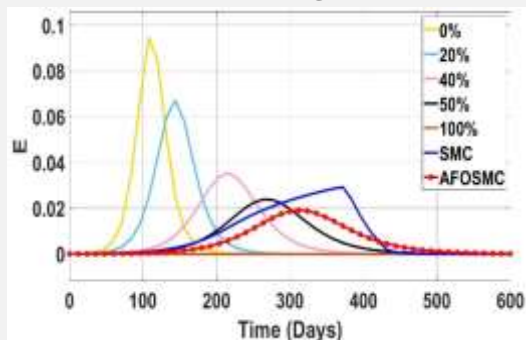
در شکل‌های (۶) و (۷) میزان افراد در معرض و مبتلا نمایش داده شده است. مطابق انتظار جهت کنترل و اتخاذ بهترین

می‌دهد با اعمال این تکنیک افراد کم‌تری در معرض قرار می‌گیرند. همچنین شیب و روند افزایش افراد در معرض تقریباً با یک نسبت خاص و ثابت افزایش پیدا کرده است که این امکان را می‌دهد که بتوان از امکانات بیمارستانی به نحو مطلوبی استفاده کرد و در هیچ بازه‌ی زمانی امکانات اشباع نشود.

طبیعتاً زمانی که تعداد افراد کم‌تری در معرض قرار گیرند تعداد کم‌تری نیز مبتلا خواهند شد. اما روش SMC با سرعت بیش‌تری و به حد آستانه‌ی بیش‌تری از افراد در معرض رسیده که خود می‌تواند باعث ایجاد اختلال در مدیریت تخت مراقبت‌های ویژه شود. در شکل (۱۰) روش پیشنهادی عمل کرد بسیار مناسبی داشته و تعداد افراد مبتلا در جامعه را نسبت به سایر روش‌ها خیلی بیش‌تر کاهش داده است. این روند ملایم افزایش، این امکان را می‌دهد که امکانات بهداشتی به حد اشباع خود نرسد. از طرفی رشد ملایم باعث جلوگیری از تجمع بیماران زیاد در یک بازه‌ی زمانی خاص شده که علاوه بر بحث مدیریتی بهداشتی، کادر درمان نیز انرژی خود را برای انجام وظیفه از دست نداده و می‌تواند بیش‌ترین بازه را داشته باشند. می‌توان نتیجه گرفت که کنترل سطح شیوع بیماری و مدیریت تخت مراقبت‌های ویژه با روش پیشنهادی بهتر صورت گرفته است. جهت مقایسه‌ی کلی روش‌های بیان شده، تمام نتایج در شکل‌های (۱۱-۱۳) نشان داده شده است. در تصاویر نشان داده شده، برتری روش پیشنهادی نسبت به سایر روش‌ها قابل مشاهده است. مهم‌ترین هدف کنترلی، جلوگیری از اشباع تخت‌های مراقب‌های ویژه بوده، که در ادامه بررسی شده است.

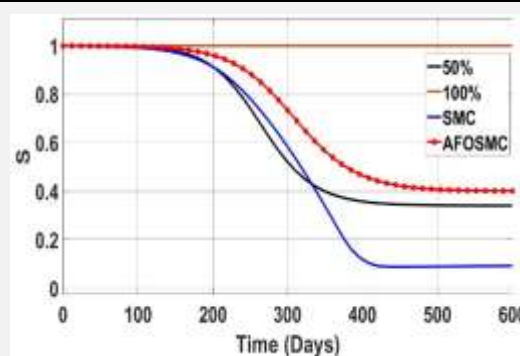


شکل (۱۱) - سیر زمانی افراد مستعد (حلقه‌ی باز و بسته)

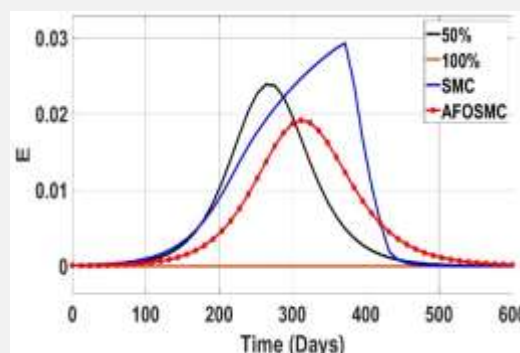


شکل (۱۲) - سیر زمانی افراد در معرض (حلقه‌ی باز و بسته)

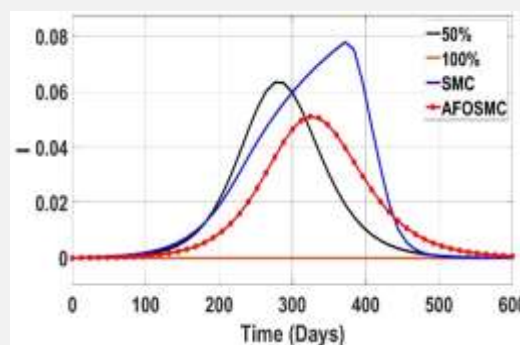
پارامترهای مدل سیستم تغییر کند (کاهش/افزایش) مقدار ورودی کنترلی مدل سیستم نیز تغییر خواهد کرد. علاوه بر این در روش ارائه شده این امکان وجود دارد که با توجه به شرایط موجود و محدودیت‌هایی مانند کمبود تخت مراقبت‌های ویژه، محدودیت کادر درمان و غیره، حد کنترلی سیستم (I_{max}) با توجه به نیازمندی‌های جامعه و سیستم بهداشتی تغییر کند و سطح شیوع بیماری نیز کنترل شود.



شکل (۸) - سیر زمانی افراد مستعد (مقایسه)



شکل (۹) - سیر زمانی افراد در معرض (مقایسه)



شکل (۱۰) - سیر زمانی افراد مبتلا (مقایسه)

مطابق شکل (۸) روش پیشنهادی عمل کرد مناسب‌تری نسبت به ۵۰٪ حلقه‌ی باز و روش SMC حلقه‌ی بسته داشته زیرا افراد مستعد به صفر میل نکرده که می‌توان نتیجه گرفت که کنترل کننده توانسته شیوع بیماری را کنترل کند که در تصاویر بعدی بیش‌تر قابل استناد و مشاهده است. نمودار افراد در معرض در شکل (۹) نشان داده شده است. روش پیشنهادی توانسته است کم‌ترین سطح از افراد را در آستانه‌ی خود داشته باشد که نشان

کاهش تعداد افراد در معرض شده که چرخه‌ی انتقال انسانی کاهش یابد و در انتها به قطع بیماری منجر شود. معیار کیفی بیان شده در بالا برای تعداد افراد در معرض نیز بررسی شده است. روش پیشنهادی نسبت به مد لغزشی کلاسیک توانسته است رفتار بهتری داشته باشد ($\int |E(t)| dt$). میزان سطح زیر نمودار افراد در معرض روش پیشنهادی نسبت به SMC کلاسیک کم‌تر است بنابراین افراد کم‌تری در معرض ابتلا در سطح جامعه قرار خواهند گرفت (جدول ۱).

جدول (۱) - مقایسه‌ی کمی روش پیشنهادی (AFOSMC) و

SMC		
$\int E(t) dt$	$\int I(t) dt$	
۴/۹۱۲	۱۳/۴۸	SMC
۳/۲۳۹	۸/۸۷۶	AFOSMC

۶- نتایج

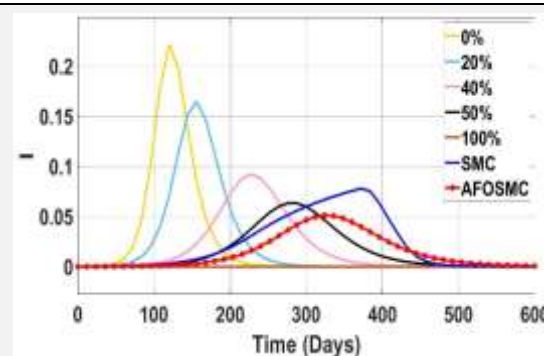
در این مقاله از تکنیک کنترل کننده‌ی مد لغزشی فعال مرتبه‌ی کسری تطبیقی برای مدل مرتبه‌ی کسری SEIR کووید ۱۹ استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که مدل مرتبه‌ی کسری پیشنهادی نسبت به مدل مرتبه‌ی صحیح از دقت بالاتری برخوردار است. همچنین روش پیشنهادی عمل‌کرد بسیار مناسبی داشته و تعداد افراد مبتلا در جامعه را نسبت به سایر روش‌ها خیلی بیش‌تر کاهش داده است. همچنین کنترل سطح شیوع بیماری و مدیریت تخت مراقبت‌های ویژه با روش پیشنهادی بهتر صورت گرفته است.

۷- سپاس‌گزاری

بدین وسیله از جناب آقای علی رضائی دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه بوعلی سینا تشکر و قدردانی می‌گردد.

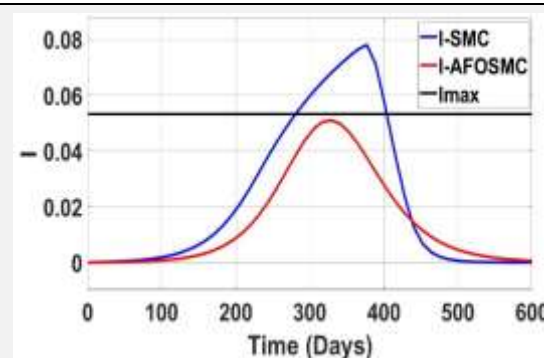
۸- مراجع

- [1] Coronavirus (covid-19). <https://covid19.who.int>
- [2] N. Banholzer, et al., Estimating the impact of non-pharmaceutical interventions on documented infections with COVID-19: A cross-country analysis. medRxiv, 2020
- [3] C. for Disease Control, P. (CDC), <https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/index.html>.
- [4] T. Carletti, D. Fanelli, and F. Piazza, COVID-19: the unreasonable effectiveness of simple models. arXiv preprint arXiv:2005.11085, 2020.
- [5] E. Tagliaruzchi, et al., Lessons from being challenged by COVID-19. Chaos, Solitons & Fractals, 2020. 137: p. 109923.



شکل (۱۳) - سیر زمانی افراد مبتلا (مقایسه)

برای مقایسه‌ی دقیق‌تر روش پیشنهادی و SMC در ادامه این موضوع بررسی شده است. هدف کنترل تعداد بیماران است به طوری که این تعداد در هیچ بازه‌ی زمانی به مقدار بیشینه‌ی امکانات (حداکثر تخت‌های مراقبت‌های ویژه‌ی بیمارستانی) نرسد (رابطه‌ی ۱۱). در شکل (۱۴) خط آبی بیان‌گر عمل‌کرد روش مد لغزشی کلاسیک است. این روش نتوانسته هدف اصلی کنترلی یعنی رابطه‌ی (۱۱) را بر آورده کند و حدوداً پس از ۲۸۰ روز تعداد بیماران از حداکثر تعداد تخت‌های مراقبت‌های ویژه‌ی بیمارستانی بیش‌تر شده است که سیستم بهداشتی کشور را با یک چالش بزرگ مواجه می‌کند. خط قرمز بیان‌گر عمل‌کرد روش پیشنهادی است. این روش به خوبی نتوانسته هدف اصلی کنترلی را بر آورده کند و در هیچ بازه‌ی زمانی تعداد افراد بیمار از امکانات تخت‌های بیمارستانی بیش‌تر نشده است که برتری این روش را به خوبی نشان می‌دهد.



شکل (۱۴) - مقایسه‌ی روش پیشنهادی (AFOSMC) و SMC در راستای تضمین عدم اشباع تخت‌های مراقبت ویژه

علاوه بر این روش پیشنهادی دارای تعداد بیماران کم‌تری در کل بازه‌ی زمانی بوده و باعث شده است که تعداد افراد کم‌تری به بیماری مبتلا شوند. این امر بر اساس معیار کمی (مساحت زیر نمودار تعداد افراد مبتلا $\int |I(t)| dt$) در جدول (۱) قابل مشاهده بوده که نشان می‌دهد تعداد افراد مبتلا به بیماری در روش پیشنهادی کم‌تر است. اعمال قوانین قرنطینه باید باعث

- incidence rates. *Nonlinear Dynamics*, 2020. 101(3): p. 2013-2026.
- [21] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, and C. Castillo-Chavez, *Mathematical models in population biology and epidemiology*. Vol. 2. 2012: Springer.
- [22] R.M Anderson, and R.M .May, *Infectious diseases of humans: dynamics and control*. 1992: Oxford university press.
- [23] F.B Hamzah, et al., CoronaTracker: worldwide COVID-19 outbreak data analysis and prediction. *Bull World Health Organ*, 2020. 1.(32)
- [24] S.J Clifford, et al ,Interventions targeting air travellers early in the pandemic may delay local outbreaks of SARS-CoV-2. *medRxiv*, 2020.
- [25] B. Tang, et al., An updated estimation of the risk of transmission of the novel coronavirus (2019-nCov). *Infectious disease modelling*, 2020. 5: p. 248-255.
- [26] B. Tang, et al., Estimation of the transmission risk of the 2019-nCoV and its implication for public health interventions. *Journal of clinical medicine*, 2020. 9(2): p. 462.
- [27] H. Xiong, and H. Yan, Simulating the infected population and spread trend of 2019- nCov under different policy by EIR model. Available at SSRN 3537083, 2020.
- [28] K. Rajagopal, et al., A fractional-order model for the novel coronavirus (COVID-19) outbreak. *Nonlinear Dynamics*, 2020. 101(1): p. 711-718.
- [29] M. Awais, et al., Modeling and simulation of the novel coronavirus in Caputo derivative. *Results in physics*, 2020. 19: p. 103588.
- [30] I.A Baba, and B.A. Nasidi, Fractional Order Model for the Role of Mild Cases in the Transmission of COVID-19. *Chaos ,Solitons & Fractals*, 2020: p. 110374.
- [31] M. Higazy, MA. Alyami, New Caputo-Fabrizio fractional order SEIASqEqHR model for COVID-19 epidemic transmission with genetic algorithm based control strategy. *Alexandria Engineering Journal*, 2020: Elsevier.
- [32] I. Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. 1998: Elsevier.
- [33] H. Dai, and W. Chen, New power law inequalities for fractional derivative and stability analysis of fractional order systems. *Nonlinear Dynamics*, 2017. 87(3): p. 1531-1542.
- [34] Li, Y., Y. Chen, and I. Podlubny, Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: [6] B. Ivorra, et al., Mathematical modeling of the spread of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) taking into account the undetected infections. *Comm in Non. Sci. and Num. Sim.*, 2020. 88: p. 105303.
- [7] S. uñez, et al., Potentials of constrained sliding mode control as an intervention guide to manage COVID19 spread. *medRxiv*, 2020.
- [8] M. Zamir, et al., Non Pharmaceutical Interventions for Optimal Control of COVID19. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2020. 196: p. 105642.
- [9] S. Ullah, et al., Optimal control analysis of vector-host model with saturated treatment. *The European Physical Journal Plus*, 2020. 135(10): p. 1-25.
- [10] D.H Morris, et al., Optimal, near-optimal, and robust epidemic control. *arXiv preprint arXiv:2004.02209*, 2020.
- [11] F.A Pazos, and F. Felicioni, A control approach to the Covid-19 disease using a SEIHRD dynamical model. *medRxiv*, 2020.
- [12] J.A Gondim, and L. Machado, Optimal quarantine strategies for the COVID-19 pandemic in a population with a discrete age structure. *arXiv preprint arXiv:2005.09786*, 2020.
- [13] M.M Morato, et al., An Optimal Predictive Control Strategy for COVID-19 (SARS-CoV-2) Social Distancing Policies in Brazil. *arXiv preprint arXiv:2005.10797*, 2020.
- [14] C. Tsay, et al., Modeling, state estimation, and optimal control for the US COVID-19 outbreak. *arXiv preprint arXiv:2004.06291*, 2020.
- [15] T. Berger, Feedback control of the COVID-19 pandemic with guaranteed non-exceeding ICU capacity. *arXiv preprint arXiv:2008.09426*, 2020.
- [16] A. Ibeas Hernández, M. De la Sen Parte, and S. Alonso Quesada, Robust Sliding Control of SEIR Epidemic Models. 2014.
- [17] Xiao, Y., X. Xu, and S. Tang, Sliding mode control of outbreaks of emerging infectious diseases. *Bulletin of mathematical biology*, 2012. 74(10): p. 2403-2422.
- [18] R. Khalili Amirabadi, A. Heydari, and M. Zarrabi, Analysis and control of SEIR epidemic model via sliding mode control. *Advanced Modeling and Optimization*, 2016. 18(1): p. 153-162.
- [19] M.T Angulo, et al., A simple criterion to design optimal nonpharmaceutical interventions for epidemic outbreaks. *medRxiv*, 2020.
- [20] G. Rohith, and K. Devika, Dynamics and control of COVID-19 pandemic with nonlinear



- [35] H.W. Hethcote, The mathematics of infectious diseases. *SIAM review*, 2000. 42(4): p. 599-653.
- [36] A.D. Ames, et al., Safety-critical control of active interventions for COVID-19 mitigation. *Ieee Access*, 2020. 8: p. 188454-188474.

Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010. 59(5): p. 1810-1821.