

Development of Viscoelastic Contact Theory for Cylindrical and Biological Micro/Nanoparticles

Y. Habibi Sooha¹, M. Mozafari², M. Habibnejad Korayem^{3*}

¹ M.Sc, Mechanical Engineering Department, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

² B.Sc, Mechanical Engineering Department, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

³ Professor, Mechanical Engineering Department, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

Receipt in the Online Submission System: 27 November 2017, Received in Revised Form: 13 May 2018, Accepted: 23 May 2018

Abstract

In the most contact theories such as Hertz, DMT and JKR, which are the most practical contacts models, biological particles are considered as a spherical elastic particle, which is not the best assumption. In this assumption, the history of loadings are not considered in that the history of strains and stresses will not analyzed properly. Therefore, in the first part of this paper, three models of elastic in spherical geometry have been developed to the viscoelastic models. By simulations and comparing the results with the experimental data of MCF-10A (breast-cancer cell), which is derived by Atomic Force Microscopy, it is revealed that viscoelastic models are more accurate than elastic models in the force-indentation curves. Then, according to the fact that most bacteria's geometry is cylindrical, contact theory for a sphere and cylinder have been developed and simulated for three groups of nanobacteria (Epidermidis, SallyVirus, and Aureus). By comparing simulations results with experimental data we observe that elastic models are not reasonable and contacts radius in viscoelastic model are smaller than they were for elastic models.

Keywords: *Atomic Force Microscopy, Viscoelastic Contact Theory, Elastic Contact Theory, Cylindrical Geometry, Bacteria, MCF-10A*

*Corresponding Author

Address: School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, P. O. Box: 16846-13114, Tehran, Iran
Tel: +98-21- 77240194
Fax: +98-21-77240448
E-mail: hkorayem@iust.ac.ir

توسعه‌ی تئوری تماسی ویسکوالاستیک برای میکرو/نانوذرات زیستی استوانه‌ای

یوسف حبیبی سوها^۱، محدثه مظفری^۲، محرم حبیب‌نژاد کورایم^{۳*}

^۱ کارشناس ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

^۲ کارشناس، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

^۳ استاد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

تاریخ ثبت در سامانه: ۱۳۹۶/۹/۶، بازنگری: ۱۳۹۷/۲/۲۳، پذیرش قطعی: ۱۳۹۷/۳/۲

چکیده

در اغلب تئوری‌های تماس، که از پرکاربردترین آن‌ها می‌توان به سه مدل هرتز، DMT و JKR اشاره کرد، ذرات زیستی به صورت جسم کروی الاستیک در نظر گرفته شده‌اند که این فرض مناسبی نیست. الاستیک در نظر گرفتن ذرات زیستی منجر به نادیده گرفتن تاریخچه‌ی بارگذاری می‌شود که در نتیجه‌ی آن، تاریخچه‌ی تنش‌ها و کرنش‌های وارد بر ماده مورد بررسی قرار نمی‌گیرد. بنابراین، در بخش اول به توسعه‌ی سه مدل بیان شده، از حالت الاستیک به ویسکوالاستیک در هندسه‌ی کروی پرداخته شد. شبیه‌سازی و مقایسه‌ی این سری تئوری با داده‌های تجربی به دست آمده از آزمایش دندان‌گذاری سلول سرطانی MCF-10A به وسیله‌ی میکروسکوپ نیروی اتمی در این مقاله، نشان داد که حالت ویسکوالاستیک نسبت به حالت الاستیک پیش‌بینی بهتری را از رفتار نیرو-دندان‌گذاری این سلول ارائه می‌دهد. سپس، با توجه به اینکه اکثر باکتری‌ها دارای هندسه‌ای نزدیک به استوانه هستند، اقدام به توسعه و مدل‌سازی تئوری‌های تماسی ویسکوالاستیک برای تماس یک کره و یک استوانه شد. پس از آن، به شبیه‌سازی تماس الاستیک و ویسکوالاستیک برای سه دسته‌ی نانوباکتری اپیدرمیدیس، سالیویروس و آئروس، با استفاده از سری دوم تئوری‌های توسعه داده شده پرداخته شد. مقایسه‌ی نتایج شبیه‌سازی تماس الاستیک و ویسکوالاستیک با نتایج آزمایشگاهی موجود (دندان‌گذاری به وسیله‌ی میکروسکوپ نیروی اتمی)، نشان داد که در نظر گرفتن حالت الاستیک برای شبیه‌سازی تماس نانوذرات زیستی مناسب نبوده و نتایج غیردقیقی را ارائه می‌دهد. همچنین، مقایسه‌ی نمودار شعاع تماس برحسب عمق دندان‌گذاری در دو تئوری الاستیک و ویسکوالاستیک نشان داد که به ازای میزان شعاع تماسی ایجادشده‌ی یک‌سان، میزان عمق دندان‌گذاری در حالت الاستیک از ویسکوالاستیک بیشتر است.

کلیدواژه‌ها: میکروسکوپ نیروی اتمی، تئوری تماسی ویسکوالاستیک، تئوری تماسی الاستیک، هندسه‌ی استوانه‌ای، باکتری، MCF-10A

*نویسنده مسئول

نشانی: دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، نارمک، تهران، ایران، کد پستی: ۱۶۸۴۶۱۳۱۱۴

تلفن: ۰۹۸ (۲۱) ۷۷۲۴۰۱۹۴

دورنگار: ۰۹۸ (۲۱) ۷۷۲۴۰۴۴۸

پست الکترونیکی: hkorayem@iust.ac.ir

۱- مقدمه

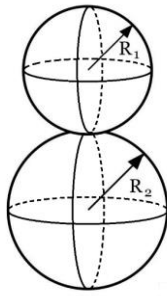
بررسی رفتار مکانیکی نانوذرات زیستی در منیپولیشن، احتیاج به مدل تماسی مناسب و نیز در دست داشتن خواص مکانیکی دقیق آن‌ها دارد. در تئوری‌های مربوط به تماس، خواص ذرات، هندسه و پارامترهای محیطی نظیر جنس سطح، مبنا در نظر گرفته می‌شوند، پس واضح است که به‌کارگیری تئوری تماسی مناسب در انجام دقیق‌تر فرآیند منیپولیشن بسیار موثر است. از سوی دیگر، بررسی و به‌کارگیری خواص مکانیکی، منوط به تئوری مورد استفاده در مدل‌سازی و شبیه‌سازی است. مدل‌هایی که تاکنون به‌منظور منیپولیشن نانوذرات زیستی به کار گرفته شده است، اغلب الاستیک بوده‌اند. نکته‌ی حائز اهمیت که در بررسی رفتار مکانیکی با مدل‌های الاستیک وجود دارد، عدم توجه این مدل‌ها به احتساب تاریخچه‌ی تنش‌ها و کرنش‌های وارد بر ماده‌ی تحت بررسی است. از این‌رو، مدل‌های تماسی ویسکوالاستیک بسیار قابل توجه خواهند بود.

اولین تئوری تماسی ارائه‌شده بین اجسام، به هرتز نسبت داده شده است [۱]. این در صورتی است که ینگ از نخستین کسانی بود که بر پایه‌ی مدل تماسی هرتز، تئوری تماسی اجسام ویسکوالاستیک کروی را ارائه داد [۲]. مشکلی که دو تئوری الاستیک و ویسکوالاستیک هرتز با آن مواجه بودند این است که انرژی چسبندگی را در نظر نمی‌گیرند. از این‌رو، مدل تماسی JKR که یک مدل دقیق برای انرژی‌های چسبندگی قوی مواد نرم کمی تغییرشکل‌پذیر است، توسط جانسون و هم‌کاران ارائه شد [۳]. چادوری، نیروی چسبندگی بین یک لنز استوانه‌ای و یک صفحه‌ی تخت را بررسی کرد و یک پروتکل آزمایشگاهی برای تخمین نیروی چسبندگی در تماس استوانه و صفحه‌ی تخت ارائه داد [۴]؛ اما این نکته که این تئوری تماسی برای ذرات زیستی نظیر سلول‌ها کاربرد دارند، توسط چو و هم‌کارانش بررسی شد. نتیجه‌گیری آن‌ها این بود که این مدل تماسی، مدلی دقیق برای مواد نرم و تغییرشکل‌پذیری است که چسبندگی قوی دارند [۵]. کورایم و هم‌کارانش، مدل تماسی JKR که چسبندگی را در نظر می‌گرفت را بررسی کردند. آن‌ها نتیجه گرفتند که در شبیه‌سازی‌های تماس نانوذرات زیستی، استفاده از تئوری تماسی نتایج بهتری را نسبت به زمانی که چسبندگی لحاظ نمی‌شد، ارائه می‌دهد [۶]. هوئی و بنی، مدل تماسی را برای کره‌های ویسکوالاستیک برای بررسی رشد ترک ارائه دادند که مدل آن‌ها به‌نوعی نسخه‌ی توسعه‌یافته‌ی مدل JKR بود. شبیه‌سازی‌های عددی آن‌ها به‌خوبی با نتایج تجربی گذشته تطابق داشت [۷]. امروزه، انجام فرآیند منیپولیشن روی ذرات زیستی مختلف، مورد توجه واقع شده است. بنابراین، علاوه بر خاصیت ویسکوالاستیکی ذرات، هندسه‌ی آن‌ها نیز دارای

اهمیت می‌باشد. بلوچ و هم‌کاران، به بررسی تاثیر هندسه بر اندازه‌ی عمق دندان‌گذاری در مقیاس میکرو پرداختند. در این پژوهش، پارامترهای هندسی سلول، مانند شعاع و ضخامت دیواره، مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۸]. ژوپانسکا، به بررسی حالت‌های مختلف نیروی چسبندگی بین استوانه و صفحه پرداخت. مدل توسعه داده‌شده برای حالت استوانه‌ای در این مطالعه، حالت الاستیک و نیروی اصطکاک را در نظر می‌گیرد. بررسی نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که سطح تماس با مدل پیشنهادی، دارای اصطکاک‌ی کوچک‌تر از مدل JKR می‌باشد [۹].

در کار دیگری، کورایم و هم‌کاران، به بررسی اهمیت هندسه در فرآیند منیپولیشن پرداختند. در این کار، با توسعه‌ی تئوری برای هندسه‌ی استوانه‌ای و مقایسه‌ی نتایج با نتایج تجربی، نشان داده شد که این نتایج حدود ۴٪ نسبت به نتایج شبیه‌سازی در حالت کروی به نتایج تجربی نزدیک شده‌اند [۱۰]. بنابراین، پارامتر هندسه و هم‌چنین در نظر گرفتن نزدیک‌ترین خاصیت به خاصیت ذرات در حال بررسی، می‌تواند در انجام دقیق‌تر فرآیند منیپولیشن موثر باشد. جین و هم‌کاران، مدل JKR را برای تماس کره-استوانه و استوانه-استوانه با سطح تماس بیضوی، به روش عددی شبیه‌سازی کردند. نتایج شبیه‌سازی عددی با نتایج به‌دست‌آمده از روش JKR برای حالت کروی تطابق خوبی داشته است [۱۱]. کورایم و هم‌کارانش، تئوری‌های تماس مختلف را برای نانوذرات زیستی به شکل استوانه و استوانه‌ی پخ خورده توسعه دادند، تا ذرات زیستی در ابعاد میکرو و نانو که دارای اشکال متفاوت بودند را با دقت بیشتری در منیپولیشن با میکروسکوپ نیروی اتمی مورد مطالعه قرار دهند. آن‌ها در ابتدا نیروهای تماسی موثر و اثر آن‌ها روی مکانیک تماس را بررسی نمودند. سپس، مدل تماسی هرتز برای نانوذرات طلا و DNA با هندسه‌های کروی، استوانه‌ای و استوانه‌ای پخ‌خورده شبیه‌سازی شد. تئوری‌های تماس نوع استوانه‌ای و استوانه‌ای پخ‌خورده، بر اساس تئوری‌های لاندبرگ، هیوپریچ، دوسون، نیک‌پور و هرتز برای منیپولیشن نانو/میکرو ذرات زیستی مدل‌سازی شدند. با نزدیک کردن هندسه‌ی استوانه‌ای به هندسه‌ی کروی، و مقایسه‌ی نتایج به‌دست‌آمده با نتایج شبیه‌سازی‌ها برای هندسه‌ی کروی، که قبلاً انجام شده بود، نتایج صحه‌سنجی شدند [۱۲]. مرادی و هم‌کاران، برای نانومیله (استوانه‌ای شکل) بر اساس مدل JKR، مقدار نیرو و زمان بحرانی برای منیپولیشن را استخراج کردند [۱۳].

کورایم و حفظ‌آباد، با توجه به اهمیت هندسه و خاصیت ذره، ذره‌ی الاستوپلاستیک را در دو هندسه‌ی کروی و استوانه‌ای مورد مطالعه قرار دادند. در این پژوهش، مدل‌های تماسی هرتز، JKR و چانگ مورد استفاده قرار گرفتند. نتایج نشان داد که در بارگذاری



شکل (۱) - طرح شماتیک تماس دو جسم کروی

اگر ماده‌ی اول و دوم به ترتیب دارای شعاع R_1 و R_2 بوده و E و ν به ترتیب مدول یانگ و ضریب پواسون باشند، آن‌گاه شعاع موثر از معادله‌ی (۱) و مدول الاستیسیته از معادله‌ی (۲) به دست می‌آیند.

$$R = (R_1 R_2 / R_1 + R_2) \quad (1)$$

$$E^* = \left[\left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \right) + \left(\frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \right]^{-1} \quad (2)$$

برای تماس بین دو ماده‌ی ویسکوالاستیک، بایستی توابع تطبیقی خزش $C_1(t)$ و $C_2(t)$ مواد ۱ و ۲، به جای مدول الاستیسیته‌ی آن‌ها، در تعریف مدول الاستیسیته‌ی موثر جایگزین شود. تابع خزش کل به صورت $C(t) \equiv C_1(t) + C_2(t)$ تعریف می‌شود [۷].

در تئوری‌های تماسی ویسکوالاستیک، از معادله‌ی (۳) برای جابه‌جایی صفحه‌ی درگیر در تماس استفاده می‌شود. اگر نیروی $p dA$ به نقطه‌ی $P'(x', y')$ وارد شود، آن‌گاه جابه‌جایی w در صفحه‌ی تماس با مختصات (x, y) ، که به فاصله‌ی ρ ($\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$) به صورت معادله‌ی (۳) قابل محاسبه است، در این معادله اوبراتور * به صورت معادله‌ی (۴) تعریف می‌شود [۷]:

$$w = \iint_{A(t)} \frac{1}{\pi} \frac{C * p}{\rho} dA = \delta(t) - \frac{r^2}{2R} dA \quad (3)$$

$$C * p \equiv \int_{0^-}^t C(t - \tau) \frac{\partial p}{\partial \tau} d\tau \quad (4)$$

می‌توان نشان داد که توزیع فشار بین اجسام در حال تماس به فرم معادله‌ی (۵) است [۷]:

$$C * p(r, t) = \left[\alpha(t)(a(t)^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} - \beta(t)(a(t)^2 - r^2)^{\frac{-1}{2}} \right] \times U(a(t) - r) \quad (5)$$

یک‌سان، میزان عمق دندان‌گذاری و شعاع تماسی برای ذره‌ی استوانه‌ای کمتر است [۱۴].

مشاهده می‌شود که رویکرد ویسکوالاستیک، تاکنون جز برای هندسه‌های کروی، برای سایر هندسه‌ها توسعه داده نشده است. از این‌رو، بسیار حائز اهمیت خواهد بود تا با ارائه‌ی یک مدل تماسی ویسکوالاستیک، امکان رویکرد ویسکوالاستیک را برای سایر هندسه‌ها ارائه دهیم. باکتری‌ها یکی از مهم‌ترین نانوذرات زیستی هستند که اغلب دارای هندسه‌ی استوانه‌ای می‌باشند. در این مقاله، ابتدا سه تئوری تماسی هرترز، DMT و JKR از حالت الاستیک (که شکل کلاسیک آن‌ها است) به ویسکوالاستیک برای هندسه‌ی کروی توسعه یافته‌اند. سپس، با استفاده از آن، تئوری ویسکوالاستیک تماسی برای هندسه‌ی استوانه‌ای ارائه شده است. واضح است که با توسعه‌ی مدل تماسی ویسکوالاستیک استوانه‌ای، به نوعی مدل جدید الاستیکی برای این هندسه توسعه داده شده است، چرا که مدل الاستیک، ساده‌شده‌ی مدل ویسکوالاستیک است که در آن متغیر زمان حذف شده است. پس از آن، پیش‌بینی نیرو-عمق دندان‌گذاری هر کدام از مدل‌های ویسکوالاستیک و الاستیک برای هندسه‌ی کروی با داده‌های تجربی مقایسه می‌شوند تا از عمل‌کرد صحیح آن‌ها اطمینان پیدا شود. سپس، همین کار را برای هندسه‌ی استوانه‌ای انجام خواهیم داد. در تمام این مراحل، ساده‌ترین تابع خزش (مدل فنر-دمپر کلونین) برای شبیه‌سازی‌ها در نظر گرفته خواهد شد.

۲- تئوری

۲-۱- تئوری ویسکوالاستیک برای اجسام کروی

در اغلب تئوری‌های تماس، سلول‌های زیستی به صورت الاستیک در نظر گرفته شده‌اند. در بررسی رفتار مکانیکی با مدل‌های الاستیک، به احتساب تاریخچه‌ی تنش‌ها و کرنش‌های وارد بر ماده‌ی تحت بررسی توجه نمی‌شود. بنابراین، نیاز به روشی که تاریخچه‌ی بار را در نظر گرفته و تاثیر آن را در نتایج نشان دهد، کاملاً ملموس است. از این‌رو، مدل‌های تماسی ویسکوالاستیک بسیار قابل توجه خواهند بود، که با توسعه‌ی آن‌ها می‌توان دقت را در مکانیک سلولی بسیار بالاتر برد [۲ و ۷].

با فرض کروی بودن هر دو جسم، و صاف و هموار در نظر گرفتن سطوح در تماس، اصطکاک قابل چشم‌پوشی خواهد بود. ناحیه‌ی تماس به صورت یک‌نواخت و ملایم با توجه به زمان افزایش می‌یابد. در مکانیک تماسی بیان شده در ادامه، شعاع ناحیه‌ی تماس با a نشان داده شده است، (شکل ۱).

^۱ Creep Compliance Function

به میکرومکانیک محلی (تا زمانی که تاریخچه‌ی نیرو به $\beta(t)$ مربوط می‌شود) مرتبط خواهد بود [۳ و ۶].

معادلات (۶)، (۷) و (۱۱) بیان‌گر مدل ویسکوالاستیک JKR هستند. آن‌چه مدل تماسی JKR را از مدل تماسی هرتز متمایز می‌کند، بیان اثر چسبندگی با استفاده از پارامتر β است. بنابراین، با توجه به این‌که در مدل تماسی هرتز چسبندگی نداریم، مقدار $\beta(t)$ برابر صفر است. روابط برای مدل تماسی هرتز به صورت معادلات (۱۲) و (۱۳) می‌باشد:

$$F = C^{-1} * \left[\frac{a(t)^3}{R} \right] \quad (12)$$

$$\delta(t) = \frac{a(t)^2}{R} \quad (13)$$

گفتنی است مدل تماسی DMT، مدلی نیمه‌تجربی است که نیروی چسبندگی را به صورت تجربی به مدل هرتز اضافه می‌کند. بنابراین، ما نیز به صورت نیمه‌تجربی مدل تماسی ویسکوالاستیک هرتز را به وسیله‌ی نیروی چسبندگی $(F_a = 2\pi R\omega)$ ، اصلاح و آن را به مدل تماسی ویسکوالاستیک DMT تبدیل می‌کنیم:

$$F = C^{-1} * \left[\frac{a(t)^3}{R} \right] - 2\pi R\omega \quad (14)$$

عمق دندان‌گذاری در معادله‌ی (۱۳) بیان شد. کاملاً مشهود است که در صورت ثابت ماندن خواص ویسکوالاستیک، نتایج حاصله بیان‌گر حالت الاستیک هستند، چرا که اگر تابع خزش مقداری ثابت داشته باشد، اپراتور * به ضرب جبری ساده تبدیل می‌شود.

۲-۲- تئوری ویسکوالاستیک برای اجسام استوانه‌ای

بررسی هندسه‌ی ذرات نشان داده است که توپوگرافی برخی از ذرات مانند باکتری‌ها به جای هندسه‌ی کروی بیشتر به سمت هندسه‌های استوانه‌ای گرایش دارند. از این‌رو، توسعه‌ی مدل‌های تماسی برای هندسه‌های مختلف مانند استوانه‌ای پراهمیت است. در تماس دو کره، مساحت سطح تماس دایره است، اما در تماس‌های غیرکروی (تماس‌هایی که در آن، حداقل هندسه‌ی یکی از اجسام کروی نباشد) مساحت سطح تماس بیضی خواهد بود. از آنجایی که در این مقاله تماس بین نوک سوزن میکروسکوپ نیروی اتمی (هندسه‌ی کروی) و باکتری (هندسه‌ی استوانه‌ای) به‌طور خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد، تئوری ویسکوالاستیکی که در بخش قبل آورده شد، متناسب با این هندسه‌ها تغییر و توسعه پیدا می‌کند.

قضیه‌ای ریاضی بیان می‌کند که هر جسمی در یک نقطه از فضا را می‌توان با دو شعاع انحنای اصلی نشان داد. جهت بررسی تئوری

که a شعاع تماس و $\alpha(t) = 2/\pi R$ است. $U(t)$ تابع پله‌ی واحد می‌باشد:

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

اگر نیروی کلی $F(t)$ را به‌وسیله‌ی انتگرال‌گیری از معادله‌ی (۵) در ناحیه‌ی تماس به دست آورده شود، این نتیجه به صورت معادله‌ی (۶) خواهد بود [۷]:

$$F = C^{-1} * \left(\frac{a(t)^3}{R} - 2\pi\beta(t)\alpha(t) \right) \quad (6)$$

$$\delta(t) = \frac{a(t)^2}{R} - \pi\beta(t) \quad (7)$$

که C^{-1} ، عکس اپراتور * برای C است و به صورت معادله‌ی (۸) تعریف می‌شود:

$$C * \phi = \psi \Leftrightarrow \phi = C^{-1} * \psi \quad (8)$$

آن‌چه که در معادلات (۶) و (۷) مجهول است، $\beta(t)$ می‌باشد، که به چسبندگی بین دو جسم بستگی دارد. برای یافتن آن می‌بایست به معادلات متناظر در حالت الاستیک رجوع شود. روابط موجود در مدل تماسی JKR الاستیک در معادلات (۹) و (۱۰) بیان شده‌اند:

$$F = E^* \left[\frac{a^3}{R} - \frac{3}{2}\pi\beta a \right] \quad (9)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} - \pi\beta \quad (10)$$

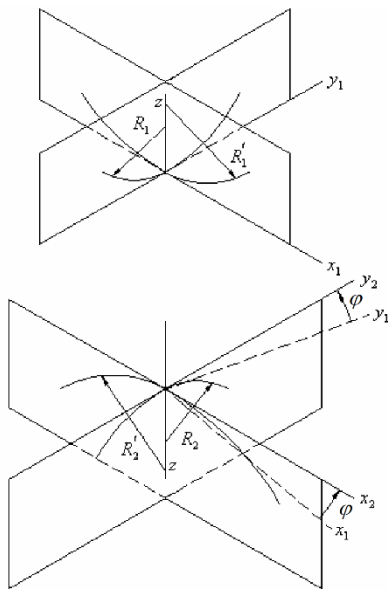
که در آن $\beta(t)$ به‌صورت $\beta = \sqrt{8\omega/3\pi} \sqrt{a/E^*}$ بیان می‌شود و در آن ثابت مربوط به چسبندگی، ω است. با مقایسه‌ی معادلات (۶) تا (۱۰)، یعنی آن‌چه که در حالت الاستیک و ویسکوالاستیک وجود دارد، متوجه خواهیم شد که تابع خزش با استفاده از اپراتور *، جایگزین عکس مدول الاستیسیته‌ی موثر شده است. یکی از آسان‌ترین روش‌های ویسکوکردن، جایگزینی ساده‌ی تابع خزش به جای مدول الاستیسیته است. چنان‌چه این کار انجام شود، تاریخچه و نحوه‌ی بارگذاری نیز در روابط نیرو و جابه‌جایی وارد می‌شود. بنابراین، بیان ویسکوالاستیکی $\beta(t)$ به صورت معادله‌ی (۱۱) خواهد بود:

$$\beta(t) = \sqrt{8\omega/3\pi} \sqrt{C(t) * a(t)} \quad (11)$$

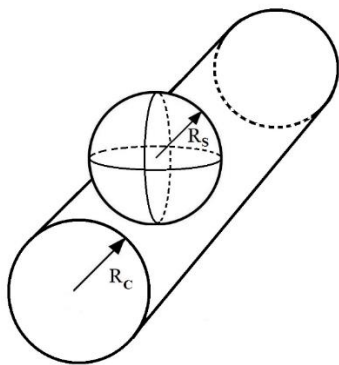
واضح است که در صورت ثابت ماندن خواص ویسکوالاستیک، نتیجه‌ی حاصله، همان تئوری مورد استفاده در حالت الاستیک است. بایستی خاطر نشان کرد که معادله‌ی (۹)، معادله‌ای است که در آن پاسخ کلی ماده‌ی ویسکوالاستیک (به‌وسیله‌ی ترم $(C * F)$)

در این جا $A = \frac{1}{2R_s} + \frac{1}{2R_c}$ و $B = \frac{1}{2R_s} + \frac{1}{2R_c}$ می‌باشند. بنابراین داریم:

$$Ax^2 + By^2 = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2R'} = \frac{\bar{r}^2}{2R'} \quad (22)$$



شکل (۲) - دو جسم و شعاع‌های اصلی آن‌ها، هنگام تماس با یکدیگر [۱۵]



شکل (۳) - طرح شماتیک تماس یک جسم کروی و یک استوانه

پس از تغییر متغیر ذکر شده، معادله‌ی (۱۸) به صورت معادله‌ی (۲۳) تبدیل خواهد شد:

$$w = \iint_{A(t)} \frac{1}{\pi} \frac{c * p}{\rho} d\bar{A}' = \frac{\delta(t)}{2R'} - \frac{\bar{r}^2}{2R'} \quad (23)$$

در این جا هم می‌توان نشان داد که مشابه معادله‌ی (۳)، پاسخ معادله‌ی (۲۳) جوابی به فرم معادله‌ی (۲۴) خواهد داشت:

$$C * p(r', t) = \left[\alpha(t)(a(t)^2 - \bar{r}^2)^{\frac{1}{2}} - \beta(t)(a(t)^2 - \bar{r}^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \times U(a(t) - \bar{r}) \quad (24)$$

تماس دو جسم در حالت کلی، فرض می‌کنیم شعاع‌های اصلی انحنا در نقطه‌ی تماس برای جسم اول، R_1 و R'_1 و برای جسم دوم، R_2 و R'_2 باشند. بدیهی است که شعاع‌های اصلی مربوط به هر یک از دو جسم، مطابق شکل (۲) در دو صفحه‌ی عمود بر هم قرار دارند.

A و B ثابت‌های مربوط به شعاع انحنا R_1 و R'_1 و R_2 و R'_2 دو جسم در مرکز تماس هستند، به‌طوری که [۱۵]:

$$2(A + B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \quad (15)$$

$$2(A - B) = \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \cos 2\varphi \quad (16)$$

که φ زاویه‌ی بین عمود بر قسمت‌هایی که شعاع انحنا R_1 هستند، می‌باشد. ω_1 و ω_2 را میزان تغییر شکل دو جسم درگیر در فشار تماس، و δ را میزان کل عمق دندان‌گذاری (جابه‌جایی نزدیکی دو جسم از لحظه‌ی شروع تماس) در نظر می‌گیرند. در حالت کلی، جابه‌جایی W از معادله‌ی (۱۷) به دست می‌آید. بنابراین معادله‌ی (۲) در یک تماس حالت کلی به صورت معادله‌ی (۱۸) خواهد بود:

$$W = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (17)$$

$$w = \iint_{A(t)} \frac{1}{\pi} \frac{c * p}{\rho} dA = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (18)$$

اگر بتوانیم با تغییر متغیری مناسب، معادله‌ی (۱۸) را به صورت معادله‌ی (۳) دربیآوریم، می‌توانیم مساله را برای حالت تماس یک کره و استوانه نیز مشخص کنیم. تبدیل مختصات را بایستی به‌گونه‌ای انتخاب کرد که سطح تماس بیضی‌شکل را به دایره در مختصات جدید تبدیل کند. مطابق شکل (۳)، اگر شعاع ذره‌ی کروی (در این جا نوک سوزن میکروسکوپ نیروی اتمی) R_s و شعاع ذره‌ی استوانه‌ای R_c (در این جا باکتری) باشد، تعریف جدید برای شعاع موثر را می‌توان به صورت معادله‌ی (۱۹) ارائه کرد:

$$R' \equiv \frac{2R_s R_c}{2R_c + R_s} \quad (19)$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x} = x \sqrt{\frac{2R_c}{2R_c + R_s}} \quad (20)$$

$$\bar{y} = y \sqrt{\frac{2R_c + 2R_s}{2R_c + R_s}} \quad (21)$$

۳- شبیه‌سازی

در این مقاله، دو سری تئوری توسعه داده شد. سری اول، تئوری مربوط به تئوری‌های تماسی ویسکوالاستیک هرتز، DMT و JKR برای دو جسم کروی بود. سپس در سری دوم، این سه تئوری را در دو حالت الاستیک و ویسکوالاستیک برای تماس بین یک کره و یک استوانه توسعه دادیم. در شبیه‌سازی هر دو سری تئوری، نوک سوزن از نوع کروی و الاستیک در نظر گرفته شده است. بدیهی است که در این مورد تابع خزش آن با زمان تغییر نخواهد کرد و مقداری ثابت خواهد داشت، یعنی:

$$C_t(t) = C_t = \frac{1 - \nu_t^2}{E_t} \quad (33)$$

تمام ذرات زیستی به کار گرفته شده، به‌عنوان جامد کلومین در نظر گرفته شده‌اند. مدل کلومین یک مدل ساده‌ی ویسکوالاستیک است که در آن فنر و دمپر با یکدیگر در حالت موازی قرار دارند. بنابراین تابع خزش برای سلول به‌صورت معادله‌ی (۳۴) است:

$$C_p(t) = \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right)\right) U(t)/E_p \quad (34)$$

بنابراین تابع خزش کل به‌صورت معادله‌ی (۳۵) است:

$$C_p(t) + C_t(t) = C_t + \frac{1}{E_p} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}}\right) U(t) \quad (35)$$

در عبارت فوق، τ_p بیان‌گر ثابت زمانی ذره‌ی زیستی می‌باشد.

۳-۱- شبیه‌سازی تماس بین دو ذره‌ی کروی

سلول به کار گرفته شده برای صحنه‌سنجی نتایج شبیه‌سازی، سلول سرطانی سینه (MCF-10A) است. هندسه‌ی این سلول با توجه به نتایج توپوگرافی، کروی می‌باشد. در جدول (۱) مشخصات سلول و سوزن میکروسکوپ نیروی اتمی آورده شده است.

جدول (۱) - مشخصات به کار گرفته شده برای شبیه‌سازی حالت

الاستیک و ویسکوالاستیک [۱۶]

ضریب پواسون	مدول الاستیسیته (Gpa)	شعاع کروی (nm)	جسم سوزن
۰.۲۷	۱۶۹	۲۵	MCF-10A
۰.۴۹۹۹	۰.۰۰۰۰۱۱	۲۰۰۰	

۳-۲- شبیه‌سازی تماس بین یک کره و استوانه

یکی از بهترین ذرات زیستی که هندسه‌ای نزدیک به هندسه‌ی استوانه‌ای دارد، باکتری‌ها هستند. در این مقاله باکتری‌هایی که جهت شبیه‌سازی انتخاب شده‌اند، از پنج نوع باکتری مختلف هستند، که در سه دسته‌ی باکتری اپیدرمیدیس، سالی‌ویروس و

که شعاع تماس در مختصات جدید است، که به ترتیب با استفاده از تغییر متغیر (۲۰) و (۲۱) به شعاع بزرگ (m) و کوچک بیضی (n) تبدیل می‌شود:

$$a(t) = \sqrt{\frac{2R_c}{2R_c + R_s}} m(t) \quad (25)$$

$$a(t) = \sqrt{\frac{2R_c + 2R_s}{2R_c + R_s}} n(t) \quad (26)$$

پس از بازگشت به مختصات اصلی، معادلات نهایی تماس به صورت (۲۷) تا (۲۹) خواهند بود:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \left(\frac{1}{R_\delta}\right) m^2(t) - \pi\beta(t) \\ &= \left(\frac{1}{R_\delta} + \frac{1}{R_c}\right) n^2(t) - \pi\beta(t) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} C * F &= \sqrt{\frac{2R_c}{2R_c + R_s}} m(t) \left[\left(\frac{1}{R_\delta}\right) m^2(t) - \frac{3}{2}\pi\beta(t) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2R_c + 2R_s}{2R_c + R_s}} n(t) \left[\left(\frac{1}{R_\delta} + \frac{1}{R_c}\right) n^2(t) - \frac{3}{2}\pi\beta(t) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \left[\left(\frac{8\omega}{3\pi} \sqrt{\frac{2R_c}{2R_c + R_s}} \right) C(t) * m(t) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\frac{8\omega}{3\pi} \sqrt{\frac{2R_c + 2R_s}{2R_c + R_s}} \right) C(t) * n(t) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (29)$$

با توجه به این که در صورت ثابت ماندن مقدار تابع خزش، اپراتور * به ضریب جبری تبدیل می‌شود، می‌توان گفت که در این جا یک تئوری تماسی الاستیک نیز برای تماس بین یک کره و استوانه ارائه شده است. در معادلات (۳۰) تا (۳۲)، روابط برای حالت الاستیک در این هندسه آورده شده است:

$$\delta = \frac{1}{R_s} m^2 - \pi\beta = \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_c}\right) n^2 - \pi\beta \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{E^*} F &= \sqrt{\frac{2R_c}{2R_c + R_s}} m(t) \left[\left(\frac{1}{R_\delta}\right) m^2(t) - \frac{3}{2}\pi\beta(t) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2R_c + 2R_s}{2R_c + R_s}} n(t) \left[\left(\frac{1}{R_\delta} + \frac{1}{R_c}\right) n^2(t) - \frac{3}{2}\pi\beta(t) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \left[\left(\frac{8\omega}{3\pi} \sqrt{\frac{2R_c}{2R_c + R_s}} \right) C(t) * m(t) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\frac{8\omega}{3\pi} \sqrt{\frac{2R_c + 2R_s}{2R_c + R_s}} \right) C(t) * n(t) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (32)$$

شده است. در شکل (۴) نتایج حاصل از شبیه‌سازی تئوری تماس برای دو حالت الاستیک و ویسکوالاستیک کروی و هم‌چنین مقایسه‌ی آن با نتایج تجربی سلول سرطانی سینه MCF-10A آورده شده است. همان‌طور که از نمودارهای نیرو-عمق دندان‌گذاری در شکل‌های (۴) و (۵) مشاهده می‌شود، با مقایسه‌ی روند طی شده در این نمودارها می‌توان گفت که این مسیر پیش‌بینی‌شده توسط تئوری ویسکوالاستیک توسعه داده شده، نسبت به الاستیک مناسب‌تر است. از سوی دیگر، با توجه به این که در حالت ویسکوالاستیک، تاریخچه‌ی زمانی نیروی واردشده و نیز ترم تلفات مطرح است، بایستی به ازای میزان عمق‌های دندان‌گذاری یک‌سان، در حالت ویسکوالاستیک نیروی بیشتری نسبت به حالت الاستیک به جسم وارد شود تا بر ترم تلفات و ثابت زمانی سیستم فائق آید.

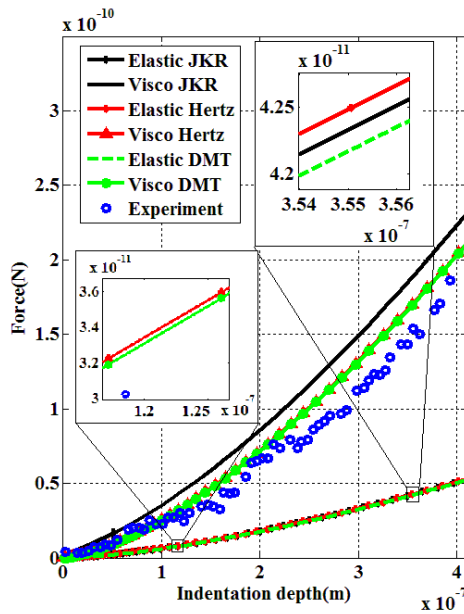
آئروس قرار می‌گیرند [۱۸]. در جدول (۲) مشخصات این پنج باکتری قرار داده شده است.

جدول (۲) - مشخصات باکتری‌های به کار رفته در شبیه‌سازی حالت الاستیک و ویسکوالاستیک [۱۸]

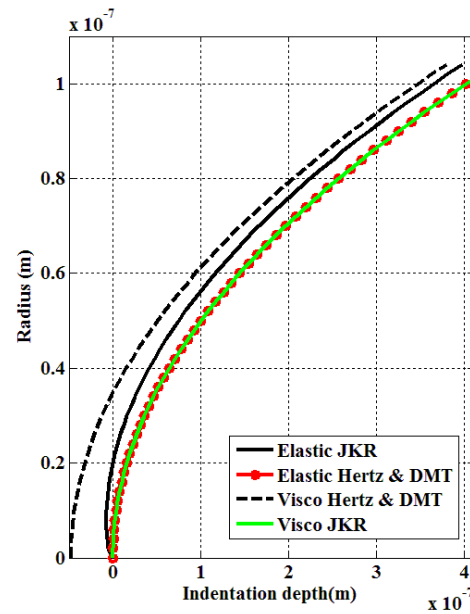
دسته	نام باکتری	مدول الاستیسیته (kPa)	شعاع (mm)
اپیدرمیدیس	ATCC 35983	۷۱۹۰	۵۰۰
	ATCC 35984	۵۱۰	۵۰۰
آئروس	NCTC 8325-4	۵۴۷۲	۵۰۰
سالی‌ویروس	HB-7	۵۹۳	۵۰۰
	HB-C12	۱۳۲۰	۵۰۰

۴- تحلیل نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت، نمودارهای مربوط به شبیه‌سازی که در قسمت قبل توضیح داده شد، به همراه تحلیل و صحنه‌سنجی آن‌ها آورده



ب) منحنی نیرو- عمق دندان‌گذاری

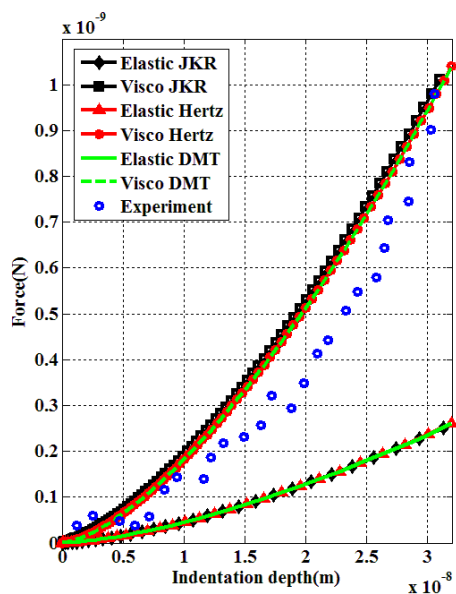


الف) منحنی شعاع - عمق دندان‌گذاری

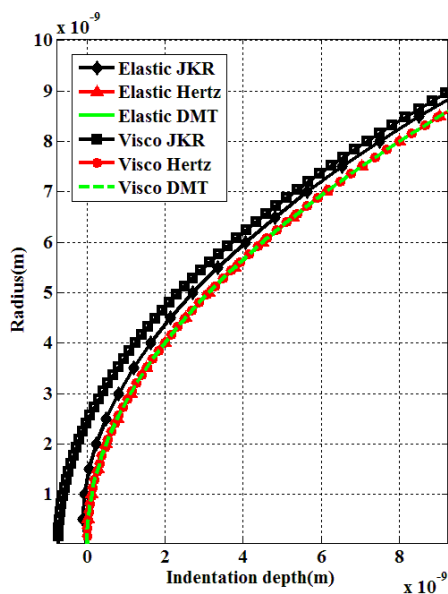
شکل (۴) - منحنی نیرو-عمق دندان‌گذاری برای سلول MCF-10A در حالت الاستیک و ویسکوالاستیک تئوری JKR، هرتز و DMT داده‌های تجربی از [۱۷] استخراج شده‌اند.

به‌مانند حالت الاستیک عمل کرده و تمامی خواص و پارامترهای درگیر در مساله ثابت می‌مانند. به بیان دیگر حالت ویسکوالاستیک متشکل از بی‌نهایت حالت الاستیک است و با این که این حالت‌های الاستیک در هر لحظه ثابت هستند، اما درعین حال در زمان‌های مختلف از یک‌دیگر متفاوت خواهند بود. با توجه به گفته‌های فوق، برای لحظه‌ی خاص $t = T$ می‌توان این هم‌ارزی را به کار برد که $C(T) = 1/E_T^*$ همان‌طور که از شکل (۶) بر می‌آید، در هر لحظه $E^* \leq E_T^*$ است، و این به آن معنی است که در حالت ویسکو به صرف نیروی بیشتری برای رسیدن به عمق دندان‌گذاری یک‌سان در حالت الاستیک نیاز است.

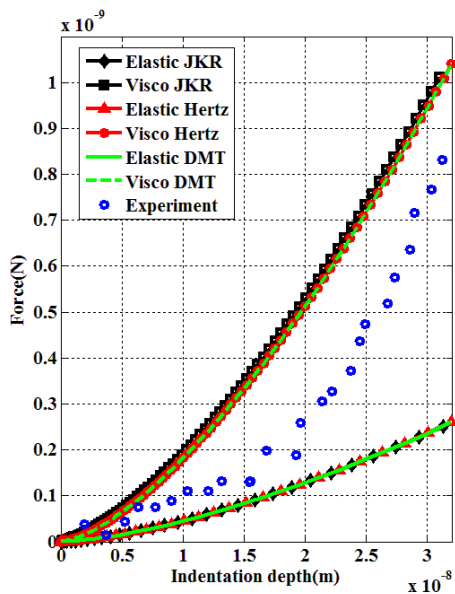
نگاه دقیق‌تر به نمودارهای نیرو-عمق دندان‌گذاری را می‌توان از طریق بررسی تابع خزش در حالت الاستیک و ویسکوالاستیک به دست آورد (شکل ۶). مشخص است که در حالت الاستیک، تابع خزش ثابت است که آن را مدول الاستیسته‌ی موثر، E^* نامیدیم. اگر به تابع خزش در معادله‌ی (۳۵) و مدول الاستیسته‌ی موثر دقت کنیم، متوجه خواهیم شد که در ذره‌ی زیستی، $\exp(-\frac{t}{\tau_p})$ به‌گونه‌ای جایگزین ضریب پواسون شده است. ما تابع خزش کل را برای یک دوره‌ی ثابت زمانی رسم کردیم. لحظه‌ی $t = T$ (که در آن $T \leq \tau_p$) را فرض می‌کنیم، بسیار بدیهی است که تمامی خواص و پارامترهای درگیر در مساله برای این لحظه ثابت می‌مانند. بنابراین در این لحظه‌ی خاص، حالت ویسکوالاستیک



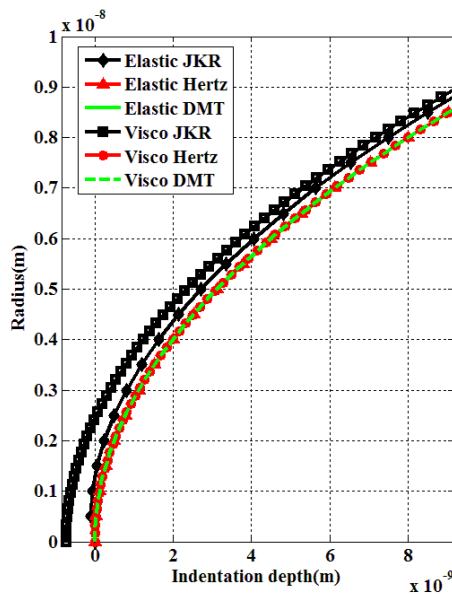
ب) منحنی نیرو- عمق دندان‌گذاری ATCC 35983



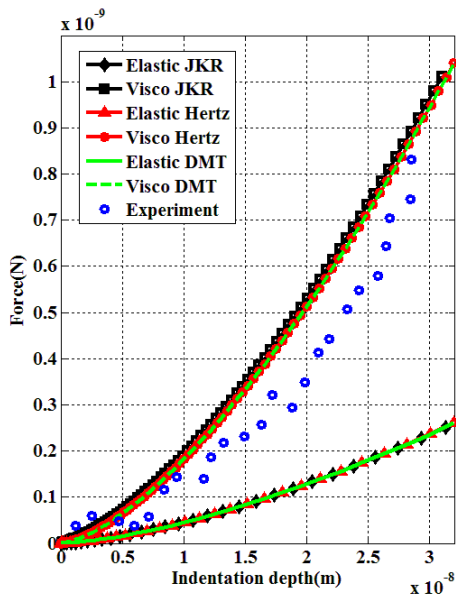
الف) منحنی شعاع - عمق دندان‌گذاری ATCC 35983



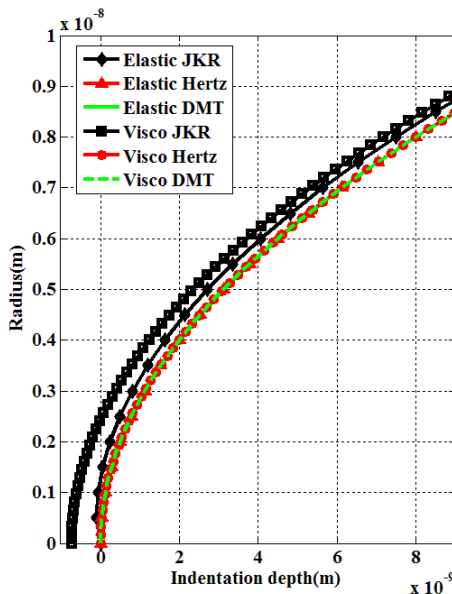
د) منحنی نیرو- عمق دندان‌گذاری ATCC 35984



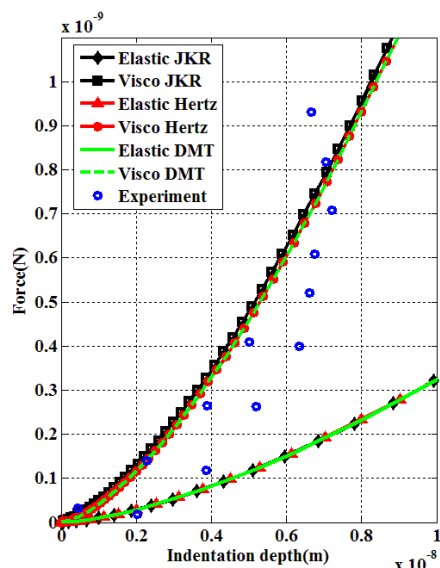
ج) منحنی شعاع - عمق دندان‌گذاری ATCC 35984



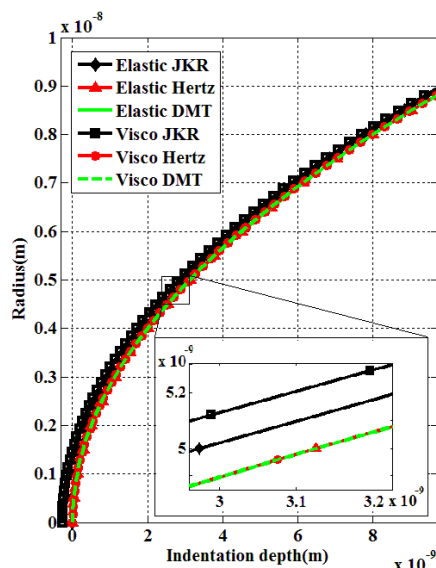
و) منحنی نیرو- عمق دندان‌گذاری HB-7



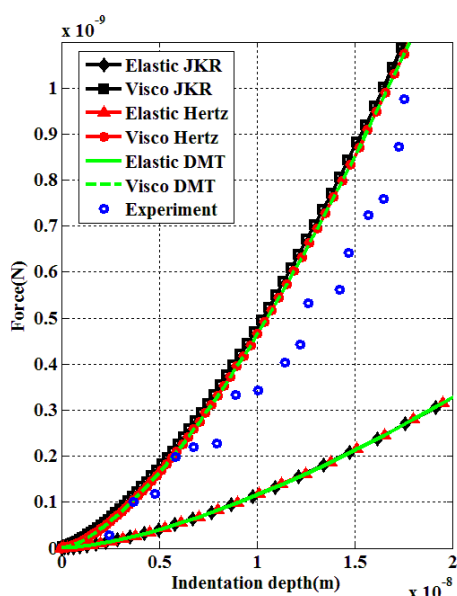
ه) منحنی شعاع - عمق دندان‌گذاری HB-7



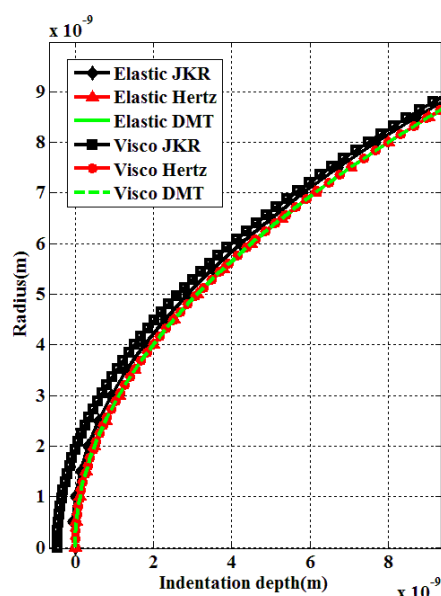
(ط) منحنی نیرو- عمق دندانگذاری NTCT 8325-4



(ج) منحنی شعاع - عمق دندانگذاری NTCT 8325-4



(ک) منحنی نیرو- عمق دندانگذاری HBC-12



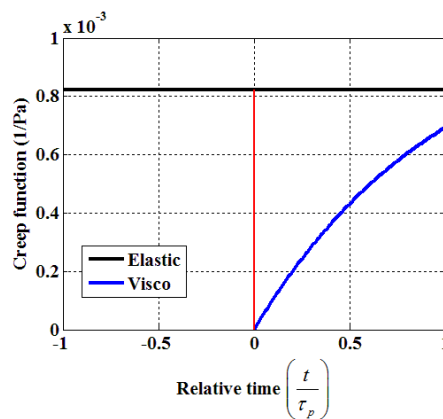
(ی) منحنی شعاع - عمق دندانگذاری HBC-12

شکل (۵) - منحنی نیرو- عمق دندانگذاری برای باکتری‌های مختلف در حالت الاستیک و ویسکوالاستیک تئوری JKR، هرتز و DMT. داده‌های تجربی از [۱۸] استخراج شده‌اند

بنابراین، در کل می‌توان گفت که با اتخاذ رویکرد ویسکوالاستیک در نظر گرفتن ذرات زیستی، به پیش‌بینی بهتری از رفتار مکانیکی آن‌ها در نمودار نیرو- عمق دندانگذاری دست می‌یابیم.

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

بسیاری از ذرات زیستی به دلیل دارا بودن بخش‌های مایع و جامد و نیز اندامک‌های ریز شناور در بخش سیتوپلاسم خود، به‌گونه‌ای هستند که در نظر گرفتن آن‌ها به‌عنوان کاملاً مایع یا جامد الاستیک خطی مناسب نیست. از این‌رو، اتخاذ تئوری تماس مناسب برای این دسته از ذرات بسیار حائز اهمیت است. تاکنون



شکل (۶) - تابع خزش بر حسب زمان نسبی

F	نیروی دندان‌گذاری (N)
δ	عمق دندان‌گذاری (nm)
R_s	شعاع کره (m)
R_c	شعاع استوانه (m)
R	شعاع موثر (m)
τ_p	ثابت زمانی ذره‌ی زیستی (s)
ω	انرژی چسبندگی (J)

۷- مراجع

- [1] Hertz, H., "Über die Berührung fester elastischer Körper", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 92, pp. 156-171, 1881.
- [2] W. Yang, "The Contact Problem for Viscoelastic Bodies"; *Journal of Applied Mechanics* 33:395-395, 1966.
- [3] K.L. Johnson, K. Kendall, A.D. Robert. "Surface Energy and the Contact of Elastic Solids"; *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 324:301-313, 1971.
- [4] K. Chaudhury, T. Weaver. "Adhesive contact of cylindrical lens and a flat sheet". *Journal of applied physics*, 80(1), pp. 30-37, 1996.
- [5] M. H. Korayem, M. Taheri, "Modeling of various contact theories for the manipulation of different biological micro/nanoparticles based on AFM", *Journal of Nanoparticle Research*, Vol. 16, No. 1, pp. 1-18, 2014.
- [6] M.H. Korayem, Z. Rastegar, M. Taheri. "Application of Johnson- Kendall Robert model in nano-manipulation of biological cell: air and liquid environment", *Micro and Nano letters*, Vol.7, pp. 576-580, 2012.
- [7] C.Y. Hui, J.M. Baney, "Contact Mechanics and Adhesion of Viscoelastic Spheres"; *Langmuir* 14:6570-6578, 1998.
- [8] J.F. Bolduc, L.J. Lewis, C.E. Aubin, A. Geitmann. "Finite-element analysis of geometrical factors in micro-indentation of pollen tubes", *Biomechanics and modeling mechanobiology*, 227-236, 2006.
- [9] O.I. Zhupanska, "Adhesive full stick contact of a rigid cylinder with an elastic half-space". *International Journal of Engineering Science*, 55, pp. 54-65, 2012.
- [10] M.H. Korayem, H. Khaksar, M. Taheri. "Effective parameters in contact mechanics for Micro/Nano particle manipulation based on Atomic Force Microscopy", *Nanoscience and Nanotechnology*, Vol. 11, pp. 83-92, 2015.
- [11] C. Jin, A. Jagota, C.Y. Hui. "An easy-to-implement numerical simulation method for adhesive contact problems involving asymmetric adhesive contact", *Journal of physics: Applied Physics*, Vol. 44, 2011.
- [12] M.H. Korayem, H. Khaksar, M. Taheri. "Modeling of contact theories for the manipulation of biological micro/nanoparticles in the form of circular crowned rollers based on the atomic force microscope", *Journal of Applied Physics*, 114:183715,1-13, 2013.

در بیشتر پژوهش‌ها رویکرد الاستیک اتخاذ شده است. این امر باعث عدم توجه این مدل‌ها به احتساب گذشته و به عبارت دقیق‌تر تاریخی‌جهی تنش‌ها و کرنش‌های وارد بر ماده‌ی تحت بررسی است. از این رو، مدل‌های تماسی ویسکو الاستیک، بسیار مورد توجه قرار می‌گیرند. در این مقاله، ابتدا به توسعه‌ی مدل‌های تماسی پر کاربرد هرتز، DMT و JKR از الاستیک به ویسکو الاستیک برای دو جسم با هندسه‌ی کره‌ی پرداخته شد. سپس، نتایج شبیه‌سازی آن با داده‌های تجربی روی سلول MCF-10A مقایسه گردید. این مقایسه نشان داد که تئوری‌های ویسکو الاستیک توسعه‌یافته‌ی جدید در این مقاله، پیش‌بینی بهتری از همتایان خود در حالت الاستیک در هر سه تئوری دارند.

همان‌طور که بیان شد، تاکنون از رویکرد ویسکو الاستیک اغلب برای ذراتی با هندسه‌های کره‌ی استفاده شده است و برای سایر هندسه‌ها توسعه پیدا نکرده است. از این رو، ارائه‌ی یک مدل تماسی ویسکو الاستیک، که امکان رویکرد ویسکو الاستیک را برای سایر هندسه‌ها فراهم کند، اهمیت داشت. باکتری‌ها یکی از مهم‌ترین نانوذرات زیستی هستند که اغلب دارای هندسه‌ی استوانه‌ای می‌باشند. پس از آن‌که از صحت عمل‌کرد تئوری‌های ویسکو الاستیک برای ذرات کره‌ی اطمینان حاصل آمد، تئوری جدیدی برای تماس یک ذره‌ی کره‌ی و یک ذره‌ی استوانه‌ای توسعه داده شد. مانند بخش قبل، به شبیه‌سازی تماس الاستیک و ویسکو الاستیک برای پنج نوع نانوباکتری پرداخته شد. مقایسه‌ی نتایج شبیه‌سازی تماس الاستیک و ویسکو الاستیک با نتایج آزمایشگاهی موجود، نشان داد که در نظر گرفتن حالت الاستیک برای شبیه‌سازی تماس نانوذرات زیستی نسبت به حالت ویسکو الاستیک پیش‌بینی با دقت کمتری را ارائه می‌دهد. همچنین، مقایسه‌ی نمودار شعاع تماس بر حسب عمق دندان‌گذاری در دو تئوری الاستیک و ویسکو الاستیک، نشان داد که به ازای میزان شعاع تماسی ایجاد شده‌ی یک‌سان، میزان عمق دندان‌گذاری در حالت الاستیک از ویسکو الاستیک بیشتر است. بنابراین، در کل می‌توان نتیجه گرفت که در هر دو نوع هندسه، رویکرد ویسکو الاستیک نتیجه‌ی بهتری را ارائه می‌دهد.

۶- فهرست علائم

A	مساحت سطح تماس (m^2)
A_{cr}	مساحت سطح تماس بحرانی (m^2)
a	شعاع تماس (m)
E_p	مدول الاستیسیته ذره (Pa)
E_t	مدول الاستیسیته سوزن (Pa)
E^*	مدول الاستیسیته موثر (Pa)

- [16] M.D. Louey, P. Mulvaney, P.J. Stewart. "Characterization of adhesional properties of lactose carriers using atomic force microscopy"; *Journal of Pharmaceutical and Biomedical Analysis* 25:559-567, 2001.
- [17] Q. S. Li, G.Y.H. Lee, C.N. Ong, C.T. Lim. "AFM indentation study of breast cancer cells"; *Biochemical and biophysical research communications* 374:609-613, 2008.
- [18] Y. Chen, W. Norde, H.C. Van der mei, H.J. Busscher. "Bacterial Cell Surface Deformation under External Loading", *mbio, Journal of bacteriology*, Vol. 3, 2012.
- [13] M. Moradi, A.H. Fereidon, S. Sadeghzadeh. "Dynamic modeling for nanomanipulation of polystyrene nanorod by atomic force microscope". *Scientia Iranica*, 18(3), pp. 808-815, 2011.
- [14] M. H. Korayem, R.N. Hefzabad, M. Taheri. "modeling and simulation of spherical and cylindrical contact theories for using in the biological nanoparticles manipulation"; *Nanoscience and Nanotechnology* 227-229, 2017.
- [15] F.P. Beer, E.R. Johnston, "Mechanics of Materials", 4th edition, Mc Grow Hill companies, ISBN: 9780073398235, 2006.