

## **Square Root Implementation of Marginalized Particle Extended Kalman Filter with an Application in ECG Processing**

H. Danandeh Hesar<sup>1</sup>, M. Mohebbi<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Ph.D Student, Department of Biomedical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

<sup>2</sup>Assistant Professor, Department of Biomedical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Receipt in the Online Submission System: 2 January 2018, Received in Revised Form: 15 May 2018, Accepted: 7 June 2018

---

### **Abstract**

**Marginalized particle extended Kalman filter (MP-EKF) takes advantage of both extended Kalman filter and particle filter frameworks to estimate nonlinear ECG dynamic models (EDMs) with reduced number of calculations in comparison to typical particle filters. However, due to existence of Kalman filter framework inside MP-EKF, some limitations are introduced in implementation of MP-EKF especially in embedded systems with finite numerical accuracies. In this paper, for the first time, we propose a square root filtering strategy for MP-EKF which alleviates these restrictions using  $QR$  factorization. Typical  $QR$  or other square-root Kalman filters cannot be employed inside MP-EKF due to presence of minus operations in some equations of MP-EKF. However, our method can be implemented in MP-EKF structure. The proposed method can be used in any EDM previously used by EKF based frameworks in the field of ECG processing.**

**Keywords:** *ECG Processing, MP-EKF,  $QR$  Factorization, Extended Kalman Filter*

---

### **\*Corresponding Author**

**Address:** Biomedical Engineering Department, Electrical Engineering Faculty, K. N. Toosi University of Technology, P. O. Box: 163151355, Tehran, Iran

**Tel:** +98-21-84062240

**Fax:** +98-21-88462066

**E-mail:** [m.mohebbi@kntu.ac.ir](mailto:m.mohebbi@kntu.ac.ir)

## پیاده‌سازی فیلتر ذره‌ای-حاشیه‌ای کالمن گسترش یافته به صورت مجذور مربعات در پردازش سیگنال ECG

حامد داننده حصار<sup>۱</sup>، مریم محبی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی پزشکی، گروه بیوالکترونیک، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
استادیار، گروه بیوالکترونیک، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

تاریخ ثبت در سامانه: ۱۳۹۶/۱۰/۱۲، بازنگری: ۱۳۹۷/۲/۲۵، پذیرش قطعی: ۱۳۹۷/۳/۱۷

### چکیده

فیلتر ذره‌ای-حاشیه‌ای کالمن گسترش یافته (MP-EKF)، از جمله روش‌های نوین در پردازش سیگنال الکتروکاردیوگرام (ECG) است که با استفاده از مزیت‌های دو نوع فیلتر بیزی ذره‌ای و کالمن گسترش یافته (EKF)، می‌تواند با محاسبات کمتری نسبت به فیلترهای ذره‌ای متداول، برای تخمین مدل‌های دینامیکی غیرخطی ECG مورد استفاده قرار گیرد. برتری این روش در حذف نویزهای ایستاد و غیر ایستاد، در مقایسه با سایر روش‌های بیزی مدل پایه، هم‌چون فیلترهای کالمن گسترش یافته و نرم‌کننده‌ی کالمن گسترش یافته (EKS)، اثبات شده است. فیلتر MP-EKF این ظرفیت را دارد که بتوان از آن در سایر مدل‌های دینامیکی ECG که قبلاً برای کاربردهایی هم‌چون قطع‌بندی سیگنال ECG به‌کاررفته‌اند، استفاده شود. اما وجود معادلات کالمن داخل این فیلتر، سبب می‌شود که مشکلات عددی و خطاهای گردسازی معادلات فیلتر کالمن در سیستم‌هایی که دقت و رزولوشن محاسباتی محدودی دارند، گریبان‌گیر MP-EKF نیز بشود. فیلترهای کالمن مجذور مربعات، در مقایسه با فیلترهای کالمن معمولی، مقاومت بیشتری نسبت به خطاهای گردسازی دارند. در این مقاله با الهام گرفتن از این گونه فیلترها، برای بالا بردن مقاومت MP-EKF نسبت به خطاهای گردسازی و مشکلات عددی، پیشنهاد می‌شود که MP-EKF به صورت مجذور مربعات پیاده شود. اما به دلیل وجود عمل‌گرهای تفریق در برخی از معادلات MP-EKF، نمی‌توان از روش‌های متداول در پیاده‌سازی مجذور مربعات فیلتر کالمن برای فیلتر MP-EKF استفاده نمود. روشی که در این مقاله پیشنهاد می‌شود، روش جدیدی است که با الهام گرفتن از تجزیه‌ی QR می‌تواند معادلات MP-EKF را به صورت مجذور مربعات پیاده‌سازی کند.

**کلیدواژه‌ها:** فیلتر ذره‌ای حاشیه‌ای، پردازش الکتروکاردیوگرام، تجزیه‌ی QR

\*نویسنده مسئول

نشانی: گروه بیوالکترونیک، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران، کد پستی: ۱۶۳۱۵۱۳۵۵

تلفن: +۹۸ (۲۱) ۸۴۰۶۲۲۴۰

دورنگار: +۹۸ (۲۱) ۸۸۴۶۲۰۶۶

پست الکترونیکی: m.mohebbi@kntu.ac.ir

## ۱- مقدمه

بهبود رفتار ذرات استفاده می‌کند. فیلتر MP-EKF برتری قابل توجهی نسبت به روش‌های بیزی خطی مانند EKF، به خصوص در نویز زدایی از نویزهای غیر ایستان از خود نشان داده است. در MP-EKF، بردار حالت مدل دینامیکی ECG به بردار خطی و غیرخطی تقسیم می‌شود. متغیرهای موجود در بردار حالت غیرخطی توسط فیلتر ذره‌ای و متغیرهای موجود در بردار حالت خطی توسط فیلتر کالمن، تخمین زده می‌شوند. این کار باعث می‌شود که هم‌زمان با افزایش قدرت تخمین در محیط‌های غیرخطی-غیر ایستان، تعداد ذرات موجود برای تخمین مدل دینامیکی نسبت به فیلترهای ذره‌ای معمولی کاهش یابد. به‌علاوه، در این فیلتر برای بهبود عمل کرد تخمین، از اطلاعات ضمنی موجود در بخش غیرخطی ذرات برای پیش‌بینی بهتر بخش خطی ذرات استفاده می‌شود.

به دلیل استفاده از خانواده‌ی فیلتر کالمن در MP-EKF، مشکلات عددی بالقوه در محاسبه‌ی ماتریس‌های کوواریانس فیلتر کالمن، بر عمل کرد فیلتر MP-EKF تاثیر خواهد گذاشت. با این‌که قدرت و دقت محاسباتی رایانه‌های کنونی نسبت به گذشته افزایش بسیاری داشته است، در برخی سیستم‌ها به خاطر محدودیت‌های سخت‌افزاری یا عملیاتی، ممکن است دقت تقریب محاسباتی آن قدر پایین باشد که خطای گردسازی یا کوانتیزاسیون باعث شود تا ماتریس‌های کوواریانس فیلتر کالمن نامعین یا وارون‌ناپذیر شوند [۶] و احتمال بروز چنین خطاهایی در MP-EKF بیشتر است. برای مقاوم‌سازی فیلترهای کالمن، می‌توان آن‌ها را به‌صورت مجذور مربعات پیاده‌سازی کرد. در این نوع پیاده‌سازی، در هر بازه‌ی زمانی، به‌جای انتقال حالت کامل ماتریس‌های کوواریانس کالمن، مجذور مربعات آن‌ها منتقل می‌شود. روش‌های مختلفی برای پیاده‌سازی مجذور مربعات در فیلترهای کالمن وجود دارد. از محبوب‌ترین این روش‌ها می‌توان به تجزیه‌ی چولسکی<sup>۱۰</sup> و مشتقات آن، تجزیه‌ی U-D [۶، ۷] و تجزیه‌ی QR [۸، ۹] اشاره کرد. یک پیشنهاد این است که معادلات فیلتر کالمن داخل MP-EKF، به‌صورت مجذور مربعات پیاده‌سازی شود تا مقاومت فیلتر نسبت به خطاهای گردسازی بیشتر شود. اما وجود عمل‌گر تفریق در معادلات MP-EKF باعث می‌شود که نتوان از روش‌های مرسوم برای پیاده‌سازی مجذور مربعات در آن استفاده کرد. در این

سیگنال ECG شامل اطلاعات بسیار مهمی از وضعیت قلب بوده و یکی از مهم‌ترین معیارهای پزشکان در تشخیص بیماری‌های قلبی و هم‌چنین سلامت یک شخص است. با گسترش نگران‌کننده‌ی بیماری‌های قلبی، به دلیل تغییر شیوه‌ی زندگی و مرگ‌ومیرهای ناشی از آن‌ها، تفسیر این سیگنال و استفاده از اطلاعات مفید آن در تشخیص و درمان بیماری‌ها اهمیت روزافزونی پیدا کرده است. با توجه به وجود اغتشاشات گوناگون در فرایند ثبت ECG و تعداد زیاد بیمارانی که نیاز به توجه و مراقبت دارند، و هم‌چنین نیاز به مشاهده‌ی مداوم بعضی از بیماران بدحال، نیاز به روش‌های مبتنی بر کامپیوتر که بتواند به‌طور خودکار و سریع، حذف نویز انجام دهند و یا نوع آریتمی و محل وقوع آن را تشخیص دهند، احساس می‌شود.

در سال‌های اخیر، روش‌های مدل‌پایه و مبتنی بر فیلترهای بیزی خطی، قابلیت خود را نسبت به سایر روش‌ها در زمینه‌ی حذف نویز، قطعه‌بندی و تشخیص محل ناهنجاری در سیگنال ECG نشان داده‌اند [۱-۳]. این روش‌ها از یکی از پرکاربردترین مدل‌های دینامیکی ECG، یعنی مدل دینامیکی غیرخطی مک‌شری<sup>۱</sup> [۴] و مشتقات آن در فضای قطبی (استوانه‌ای)، برای تحقیقات خود استفاده کردند. ساختار فیلترینگ روش‌های مذکور بر پایه‌ی فیلتر کالمن توسعه‌یافته<sup>۲</sup> (EKF) بود که یک نسخه‌ی تعمیم‌یافته از ساختار فیلتر کالمن برای پردازش مدل‌های دینامیکی غیرخطی است. با این‌که روش‌های حذف نویز مبتنی بر فیلتر EKF در محیط نویز سفید گوسی نسبت به روش‌های دیگر، مانند نویز زدایی موجک (WD<sup>۳</sup>)، فیلتر تطبیقی (AF<sup>۴</sup>)، PCA<sup>۵</sup> و غیره، از لحاظ بهبود نسبت سیگنال به نویز<sup>۶</sup> (SNR) برتری محسوسی داشت، اما به دلیل غیرخطی بودن مدل سیگنال ECG و ماهیت غیرگوسی برخی از نویزهای موجود در ECG، مانند نویز ماهیچه (MA<sup>۷</sup>)، استفاده از فیلتر EKF ممکن است نتیجه‌ی مطلوبی را ارائه ندهد.

برای غلبه بر چنین مشکلاتی، در مرجع [۵] الگوریتمی بر اساس ترکیب فیلتر ذره‌ای-حاشیه‌ای (MPF<sup>۸</sup>) و فیلتر کالمن گسترش‌یافته برای پردازش ECG پیشنهاد شده است. فیلتر مذکور، فیلتر ذره‌ای-حاشیه‌ای کالمن گسترش‌یافته (MP-EKF<sup>۹</sup>) نامیده شده و از یک استراتژی وزن‌دهی ابتکاری برای

<sup>۶</sup> Signal to Noise Ratio<sup>۷</sup> Muscle Artifact<sup>۸</sup> Marginalized Particle Filter<sup>۹</sup> Marginalized Particle Extended Kalman Filter<sup>۱۰</sup> Cholesky Factorization<sup>۱</sup> McSharry<sup>۲</sup> Extended Kalman Filter<sup>۳</sup> Wavelet Denoising<sup>۴</sup> Adaptive Filter<sup>۵</sup> Principal Component Analysis

ثامنی و هم‌کاران از مدل پیشنهادی خود برای حذف نویز سیگنال ECG با استفاده از فیلتر EKF استفاده کردند. در رابطه‌ی (۱)،  $\omega_k$  و  $z_k$ ،  $\varphi_k$ ، به ترتیب فاز، اندازه و فرکانس زاویه‌ای سیگنال ECG در بازه‌ی زمانی  $k$  هستند. هم‌چنین،  $\Delta\theta_j = (\varphi_k - \theta_j) \bmod(2\pi)$  و  $\delta$  دوره‌ی تناوب نمونه‌برداری است. پارامترهای سازنده‌ی موجک‌های گوسی  $a_j, b_j, \theta_j$  است. پارامترهای  $a_j, b_j, \theta_j$  هستند. برای هر موجک گوسی،  $a_j$  اندازه،  $b_j$  عرض و  $\theta_j$  محل قرارگیری موجک را تعیین می‌کنند.  $\eta, \eta_\omega$  و  $\eta_\phi$  نویزهای تصادفی سفید گوسی هستند که عدم قطعیت را در مدل (۱) بیان می‌کنند. قبل از پردازش سیگنال ECG توسط MP-EKF، می‌بایست مدل دینامیکی (۱) را برای هر فرد به دست آورد. از آن‌جا که پارامترهای موجود در این مدل دینامیکی، به شکل و مورفولوژی سیگنال ECG وابسته هستند، مقادیر آن‌ها برای سیگنال‌های مختلف، متفاوت است. برای ساخت مدل دینامیکی (۱) برای هر سیگنال ECG، از روش پیشنهادی در [۱۲] استفاده می‌شود. در این روش، فرض می‌شود که هر ضربان ECG در فضای قطبی استوانه‌ای، روی دایره‌ای به شعاع واحد قرار گرفته است. نحوه‌ی قرارگیری هر ضربان ECG طوری است که پیک R ضربان در فاز  $\theta = 0$  قرار گرفته باشد. برای نمونه‌های ECG بین دو پیک R متوالی، فازهای خطی [۵] یا غیرخطی [۱۰] در محدوده‌ی  $0$  و  $2\pi$  (یا  $-\pi$  و  $\pi$ ) متصور می‌شوند. سپس، بر اساس این فازدهی، میانگین و واریانس نمونه‌های هم‌فاز در ضربان‌های مختلف محاسبه می‌شود و دو موجک میانگین و واریانس ECG (به ترتیب  $\overline{ECG}(\theta)$  و  $\sigma_{ECG}(\theta)$ ) به دست می‌آیند. با اعمال یک روش آفلاین برازش غیرخطی حداقل مجذور مربعات خطا روی این دو موجک، پارامترهای سازنده‌ی مدل دینامیکی (۱) استخراج می‌شوند [۱۳]. این روش از دستور `lsqnonlin` موجود در نرم‌افزار Matlab برای برازش غیرخطی استفاده می‌کند.

مدل اندازه‌گیری (مشاهده) در MP-EKF، مشابه مدل‌های اندازه‌گیری استفاده شده در روش‌های پردازش سیگنال ECG با استفاده از EKF می‌باشد [۲، ۳، ۱۴]. در این مدل، علاوه بر مشاهدات نویزی ECG، دو مشاهده‌ی اضافی نیز وجود دارد. برای به دست آوردن این دو مشاهده‌ی اضافی، ابتدا پیک‌های R تشخیص داده می‌شود و سپس عملیات فازدهی به نمونه‌های بین پیک‌های R متوالی انجام می‌شود. این فازها به‌عنوان یکی از مشاهدات اضافی استفاده می‌شوند. مشاهده‌ی اضافی دیگر، با مشتق‌گیری از این فازها به دست می‌آید. این مشاهده در واقع

مقاله، برای اولین بار روشی پیشنهاد شده است که با الهام گرفتن از تجزیه‌ی  $QR$  می‌تواند چنین مشکل را حل کرده و الگوریتمی را برای پیاده‌سازی معادلات MP-EKF به‌صورت مجذور مربعات ارائه کند. روش مذکور، از معادلات بسیار ساده‌ای تشکیل شده است و به‌سادگی می‌توان آن را پیاده‌سازی کرد.

ساختار این مقاله به‌صورت زیر است:

در بخش دوم، به معرفی معادلات و تئوری فیلتر MP-EKF و هم‌چنین تجزیه‌ی  $QR$  می‌پردازیم. در بخش سوم، روش پیشنهادی را برای پیاده‌سازی فیلتر MP-EKF توضیح خواهیم داد. در بخش چهارم، نتایج پیاده‌سازی روش پیشنهادی در MP-EKF با هدف نویز زدایی ECG ارائه خواهد شد، و بخش پایانی مربوط به نتیجه‌گیری خواهد بود.

## ۲- پیش‌زمینه‌ی تئوریک

در این بخش، ابتدا تئوری MP-EKF و سپس تجزیه‌ی  $QR$  توضیح داده می‌شود. خوانندگانی که با معادلات این دو آشنایی دارند می‌توانند از مطالعه‌ی این بخش صرف نظر کرده و بخش بعدی را مطالعه کنند. لازم به ذکر است که مطالب گفته شده در بخش (۲-۱)، عیناً از مراجع [۵، ۱۰] آورده شده است و خوانندگان می‌توانند با مراجعه به این دو مرجع، اطلاعات بیشتری در مورد فیلتر MP-EKF کسب نمایند.

### ۲-۱- فیلتر MP-EKF برای پردازش ECG

در مراجع [۵، ۱۰]، یک فیلتر بیزی غیرخطی مدل‌پایه با نام فیلتر ذره‌ای-حاشیه‌ای کالمن گسترش‌یافته برای حذف نویز ECG معرفی شده است. این فیلتر از یک مدل دینامیکی قطبی غیرخطی برای پردازش سیگنال ECG بهره می‌برد. مدل دینامیکی مذکور به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} z_{k+1} = - \sum_{j \in \{P, Q, R, S, T\}} \omega_k \delta \frac{a_j \Delta \theta_j}{b_j^2} \exp\left(-\frac{\Delta \theta_j^2}{2b_j^2}\right) + z_k + \eta \\ \varphi_{k+1} = (\varphi_k + \omega_k \delta) \bmod(2\pi) + \eta_\phi \\ \omega_{k+1} = \omega_k + \eta_\omega \end{cases} \quad (1)$$

مدل مذکور، یکی از مشتقات مدل معروف پیشنهادی توسط ثامنی و هم‌کاران در [11] می‌باشد، که در آن سیگنال ECG به‌صورت مجموعی از چندین موجک گوسی تعریف می‌شود. در این مدل، هر بخش خاص از یک ضربان ECG، یعنی موجک‌های P, Q, R, S, T، با یک یا چندین موجک گوسی مدل می‌شود.

با توجه به فرضیات ذکر شده، ممکن است این سوال پیش بیاید که با وجود عملگر غیرخطی mod در مدل (۱)، چرا  $\varphi_{k+1}$  را در ساختار MP-EKF به عنوان متغیر حالت خطی در نظر گرفته‌ایم. پاسخ این است که در این مدل در فضای قطبی، محل وقوع پیک‌های R هر ضربان ECG، در فازهای مساوی صفر فرض می‌شوند و با وجود این که mod یک عملگر غیرخطی است، پرش‌های فازی ایجاد شده توسط این عملگر، در بخش‌هایی از ضربان ECG اتفاق می‌افتد که اندازه‌ی ECG صفر یا بسیار نزدیک به صفر است. بنابراین در ولج،  $\varphi_{k+1}$  یک متغیر حالت خطی است و پردازش آن به صورت یک متغیر حالت غیرخطی باعث اضافه شدن پیچیدگی غیرلازم در سیستم می‌شود. با توجه به توضیحات فوق، فیلتر MP-EKF با استفاده از مدل (۳)، سیگنال ECG را طی مراحل زیر پردازش می‌کند:

$$-1 \quad \mathbf{x}_{k|k}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k|k}^{NL(i)} \\ \mathbf{x}_{k|k}^L(i) \end{bmatrix}, i = 1, \dots, N \quad \text{ذرات } k = 0$$

از توزیع اهمیت  $p_{\mathbf{x}_{0|0}^{NL}}(\mathbf{x}_{0|0}^{NL})$  و توزیع نرمال  $\mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{P}_0)$  (بردار میانگین حالت خطی اولیه  $\bar{\mathbf{x}}_0$ ، ماتریس کوواریانس حالت خطی اولیه  $\bar{P}_0$ ) نمونه‌برداری می‌شوند. به عبارتی  $\mathbf{x}_{k|k}^{NL(i)} \sim p_{\mathbf{x}_{0|0}^{NL}}(\mathbf{x}_{0|0}^{NL})$  و  $\mathbf{x}_{k|k}^L(i) \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{P}_0)$

-2 به ازای  $i = 1, \dots, N$ ، با استفاده از رابطه‌ی  $w_k^{(i)} \propto p(\mathbf{y}_k | X_k^{NL(i)}, Y_{k-1})$  وزن‌های اهمیت به روز رسانی می‌شوند. در این رابطه داریم:

$$X_k^{NL(i)} = \{\mathbf{x}_{0|0}^{NL(i)}, \mathbf{x}_{1|1}^{NL(i)}, \dots, \mathbf{x}_{k|k}^{NL(i)}\}$$

$$Y_{k-1} = \{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}\}$$

و  $\mathbf{x}_{k|k}^{NL(i)}$  -امین ذره‌ی تقریب زده شده از متغیر  $\mathbf{x}_k^{NL}$  در زمان  $k$  است.  $\mathbf{x}_{k|k}^{NL}$  تقریب غیرخطی از  $\mathbf{x}_k^{NL}$  است که با جمع وزن‌دار ذرات  $\mathbf{x}_{k|k}^{NL(i)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) محاسبه می‌شود. به عبارت دیگر:

$$\mathbf{x}_{k|k}^{NL} = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \mathbf{x}_{k|k}^{NL(i)} \quad (4)$$

-3 وزن‌ها نرمالیزه می‌شوند:

$$\tilde{w}_k^{(i)} = \frac{w_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^N w_k^{(j)}} \quad (5)$$

-4 در صورت لزوم وزن‌ها باز نمونه‌برداری می‌شوند.

اندازه‌گیری از فرکانس زاویه‌ای ECG است. بدین ترتیب، مدل اندازه‌گیری در [۵، ۱۰] به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ \phi_k \\ \Omega_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ \varphi_k \\ \omega_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_k = E \left\{ \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \right\}$$

در مدل (۲)، بردار اندازه‌گیری و بردار نویز اندازه‌گیری در بازه‌ی زمانی  $k$  با ماتریس کواریانس  $R_k = E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T\}$  است. در فیلتر MP-EKF، معادلات (۱) و (۲) به شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\mathbf{x}_{k+1}^{NL} = g(\mathbf{x}_k^L, \boldsymbol{\omega}_k^{NL}) + f_k^{NL}(\mathbf{x}_k^{NL}) \quad (\text{الف-3})$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^L = (A_k^L \mathbf{x}_k^L + G_k^L \boldsymbol{\omega}_k^L) \bmod (2\pi) \quad (\text{ب-3})$$

$$\mathbf{y}_k = h_k^{NL}(\mathbf{x}_k^{NL}) + H_k \mathbf{x}_k^L + \mathbf{e}_k. \quad (\text{ج-3})$$

همان‌طور که در (۳) مشاهده می‌شود، فیلتر ذره‌ای-حاشیه‌ای MP-EKF برای کاهش بار محاسباتی، بردار حالت را به دو زیرمجموعه‌ی بردار حالت خطی  $\mathbf{x}_k^L$  و غیرخطی  $\mathbf{x}_k^{NL}$  تقسیم کرده است. متغیرهای داخل  $\mathbf{x}_k^L$  توسط فیلتر کالمن و متغیرهای داخل  $\mathbf{x}_k^{NL}$  توسط فیلتر ذره‌ای تخمین زده می‌شوند. در رابطه‌ی (۳)، روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$f_k^{NL}(\mathbf{x}_k^{NL}) = z_k \quad \text{و} \quad A_k^L = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^L = [\varphi_{k+1}, \omega_{k+1}]^T, \quad \mathbf{x}_{k+1}^{NL} = z_{k+1}$$

$$R_k = \begin{pmatrix} R_k^{NL} & 0 \\ 0 & R_k^L \end{pmatrix}, R_k^{NL} = E\{u_k^T u_k\}, R_k^L = E\{[v_k, w_k]^T [v_k, w_k]\}$$

$$\boldsymbol{\omega}_k^{NL} = [\eta, a_j, b_j, \theta_j]^T \quad (j \in P, Q, R, S, T), \boldsymbol{\omega}_k^L = [\eta_\phi, \eta_\omega]^T$$

$$g(\mathbf{x}_k^L, \boldsymbol{\omega}_k^{NL}) = - \sum_{j \in \{P, Q, R, S, T\}} \omega_k \delta \frac{a_j \Delta \theta_j}{b_j^2} \exp\left(-\frac{\Delta \theta_j^2}{2b_j^2}\right)$$

$$Q_k = \begin{pmatrix} Q_k^{NL} & 0 \\ 0 & Q_k^L \end{pmatrix}$$

$$Q_k^L = E\{\boldsymbol{\omega}_k^L (\boldsymbol{\omega}_k^L)^T\} \quad \text{و} \quad Q_k^{NL} = E\{\boldsymbol{\omega}_k^{NL} (\boldsymbol{\omega}_k^{NL})^T\}$$

هم‌چنین داریم:

$$H_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad h_k^{NL}(\mathbf{x}_k^{NL}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_k^{NL}$$

۸- برای هر ذره  $i = 1, \dots, N$ ، مرحله‌ی به‌روزرسانی زمانی دوم (پیش‌بینی دوم) فیلتر کالمن برای زمان  $k + 1$  اجرا می‌شود:

$$\xi_k^{(i)} \approx g(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{L,(i)}, \bar{\omega}_k^{NL}) + \mathcal{A}_k^{(i)} (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{L,(i)} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{L,(i)}) + \mathcal{B}_k^{(i)} (\omega_k^{NL} - \bar{\omega}_k^{NL})$$

$$\mathcal{A}_k^{(i)} = \left( \frac{\partial g(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{L,(i)}, \bar{\omega}_k^{NL})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{L,(i)}} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{L,(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{L,(i)}} \right)^T$$

$$\mathcal{B}_k^{(i)} = \left( \frac{\partial g(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{L,(i)}, \omega_k^{NL})}{\partial \omega_k^{NL}} \Big|_{\omega_k^{NL} = \bar{\omega}_k^{NL}} \right)^T \quad (الف-۹)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{L,(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{L,(i),*} + L_k^{(i)} (\xi_k^{(i)} - g(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{L,(i)}, \bar{\omega}_k^{NL})) \quad (ب-۹)$$

$$N_k^{(i)} = \mathcal{A}_k^{(i)} P_{k|k}^{(i)} (\mathcal{A}_k^{(i)})^T + \mathcal{B}_k^{(i)} Q_k^{NL} (\mathcal{B}_k^{(i)})^T \quad (ج-۹)$$

$$L_k^{(i)} = A_k^L P_{k|k}^{(i)} (\mathcal{A}_k^{(i)})^T (N_k^{(i)})^{-1} \quad (د-۹)$$

$$P_{k+1|k}^{(i)} = P_{k+1|k}^{(i),*} - L_k^{(i)} N_k^{(i)} (L_k^{(i)})^T \quad (ه-۹)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در MP-EKF، بخش‌های خطی ذرات در دو مرحله‌ی مختلف پیش‌بینی می‌شوند و با توجه به معادلات پیش‌بینی در مرحله‌ی ۸، این نکته دیده می‌شود که معادلات پیش‌بینی MP-EKF با معادلات پیش‌بینی کالمن تفاوت دارد. ایده‌ی استفاده از معادلات (۹) برای به‌روزرسانی زمانی، از مقاله‌ی شون<sup>۱</sup> و هم‌کاران در [۱۵] گرفته شده است. در [۱۵]، این ادعا اثبات شد که در مدل‌های ترکیبی خطی-غیرخطی می‌توان از اطلاعات ضمنی به‌دست‌آمده از مرحله‌ی پیش‌بینی بخش غیرخطی ذرات در فیلترهای ذره‌ای-حاشیه‌ای  $(\xi_k^{(i)})$  برای بهبود پیش‌بینی بخش خطی ذرات استفاده نمود. نکته‌ی دیگری که باید به آن اشاره کنیم این است که در [۵]، [۱۰]، پیشنهاد شد که از همان مدل دینامیکی (۱) به عنوان توزیع اهمیت برای نمونه‌برداری بخش غیرخطی ذرات (مرحله‌ی ۶) استفاده شود. نظر به این که مدل دینامیکی مورد استفاده در MP-EKF و توزیع اهمیت آن یک‌سان هستند، فیلتر MP-EKF در رده‌ی فیلترهای ذره‌ای بوت‌استرپ<sup>۲</sup> قرار می‌گیرد.

### ۲-۲- تجزیه‌ی QR

اگر فرض کنیم  $A_{m \times n}$  یک ماتریس دل‌خواه با ستون‌های مستقل از هم باشد، می‌توان آن را به شکل زیر تجزیه نمود [۱۶]:

$$A = QR = [q_1 \dots q_m] \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} & \dots & \mathcal{R}_{1n} \\ 0 & \mathcal{R}_{22} & \dots & \mathcal{R}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{R}_{nn} \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

<sup>۲</sup> Boot-strap particle filter

۵- به ازای هر ذره  $i = 1, \dots, N$ ، مرحله‌ی به‌روزرسانی کالمن انجام می‌شود:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{L,(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{L,(i)} + K_k^{(i)} (\mathbf{y}_k - h_k^{NL}(\mathbf{x}_{k|k}^{NL,(i)})) - C_k^L \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{L,(i)} \quad (الف-۶)$$

$$P_{k|k}^{(i)} = P_{k|k-1}^{(i)} - K_k^{(i)} C_k^L P_{k|k-1}^{(i)} \quad (ب-۶)$$

$$S_k^{(i)} = C_k^L P_{k|k-1}^{(i)} (C_k^L)^T + R_k^L \quad (ج-۶)$$

$$K_k^{(i)} = P_{k|k-1}^{(i)} (C_k^L)^T (S_k^{(i)})^{-1} \quad (د-۶)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{L,(i)}$  و  $P_{k|k-1}^{(i)}$  به ترتیب بردار میانگین و ماتریس کوواریانس خطی حالت پیش‌بینی شده برای بخش خطی ذره‌ی  $i$ -ام در زمان  $k$   $(\mathbf{x}_k^{L,(i)})$ ، و  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{L,(i)}$  و  $P_{k|k}^{(i)}$  به ترتیب بردار میانگین و ماتریس کوواریانس خطی حالت به‌روزرسانی شده‌ی  $\mathbf{x}_k^{L,(i)}$  هستند. همچنین  $K_k^{(i)}$  و  $S_k^{(i)}$  به ترتیب بهره‌ی کالمن و ماتریس کوواریانس پیش‌بینی اندازه‌گیری برای  $\mathbf{x}_k^{L,(i)}$  می‌باشند. هم‌چنین در (۶)،  $C_k^L$  بخشی از ماتریس  $H_k$  است که تنها مربوط به متغیرهای خطی معادله‌ی اندازه‌گیری (۳-ج) است به قسمی که:

$$\begin{bmatrix} \phi_k \\ \Omega_k \end{bmatrix} = C_k^L \cdot \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \omega_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k \\ w_k \end{bmatrix} \quad (۷)$$

$$R_k^L = E \{ [v_k, w_k]^T [v_k, w_k] \}$$

به عبارت دیگر

$$C_k^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۶- عملیات پیش‌بینی برای بخش غیرخطی ذرات برای زمان  $k + 1$  با نمونه‌برداری از توزیع اهمیت ذرات انجام می‌شود:

$$\mathbf{x}_{k+1|k}^{NL,(i)} \sim p(\mathbf{x}_{k+1|k}^{NL} | X_k^{NL,(i)}, Y_k)$$

۷- به ازای هر ذره  $i = 1, \dots, N$ ، اولین به‌روزرسانی زمانی (پیش‌بینی) فیلتر کالمن برای زمان  $k + 1$  اجرا می‌شود:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{L,(i),*} = A_k^L \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{L,(i)} \quad (الف-۸)$$

$$P_{k+1|k}^{(i),*} = A_k^L P_{k|k}^{(i)} (A_k^L)^T + Q_k^L \quad (ب-۸)$$

که در آن،  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^{L,(i),*}$  و  $P_{k+1|k}^{(i),*}$  نمایندگان موقتی برای بردار میانگین و ماتریس کوواریانس پیش‌بینی شده برای  $\mathbf{x}_{k+1}^{L,(i)}$  هستند.

<sup>۱</sup> Schon

از زمان معرفی فیلتر کالمن در دهه‌ی ۱۹۶۰، محققان با مشکلات ناشی از خطاهای گرد کردن در پیاده‌سازی این فیلتر آشنا بوده و سعی کرده‌اند با روش‌های مختلف بر این مشکلات فائق آیند. یکی از راه‌حل‌هایی که در این زمینه پیشنهاد شد این بود که معادلات مربوط به ماتریس‌های کواریانس حالت به صورت مجذور مربعات پیاده‌سازی شود. این معادلات به جای محاسبه‌ی ماتریس‌های کواریانس حالت، مجذور مربعات آن‌ها را محاسبه می‌کردند. همان‌طور که می‌دانیم، عدد شرطی مجذور ماتریس کواریانس حالت یا  $(P_{k|k}^{(i)})^{1/2}$ ، مجذور عدد شرطی ماتریس  $P_{k|k}^{(i)}$  است. به عبارت دیگر به علت کوچک‌تر بودن عدد شرطی ماتریس  $(P_{k|k}^{(i)})^{1/2}$  نسبت به عدد شرطی  $P_{k|k}^{(i)}$ ، ماتریس  $(P_{k|k}^{(i)})^{1/2}$  نسبت به  $P_{k|k}^{(i)}$  معکوس‌پذیرتر و به بیان دیگر نسبت به خطاهای گردسازی مقاوم‌تر است. بنابراین اگر معادلات کالمن طوری بازنویسی شوند که به‌جای انتشار فرم کامل ماتریس‌های  $P_{k+1|k}^{(i)}$  و  $P_{k|k}^{(i)}$ ، مجذور آن ماتریس‌ها به زمان‌های بعدی منتقل شوند، می‌توان بدون تغییر دادن سخت‌افزار، تحمل‌پذیری فیلتر کالمن در مقابل خطاهای گردسازی را به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش داد. هم‌چنین در هر زمان که بخواهیم، با استفاده از رابطه‌های زیر می‌توانیم به فرم کامل ماتریس‌های کواریانس دسترسی داشته باشیم.

$$\begin{aligned} P_{k+1|k}^{(i)} &= (P_{k+1|k}^{(i)})^{1/2} (P_{k+1|k}^{(i)})^{T/2} \\ P_{k|k}^{(i)} &= (P_{k|k}^{(i)})^{1/2} (P_{k|k}^{(i)})^{T/2} \end{aligned}$$

در زمینه‌ی پیاده‌سازی فیلتر کالمن به صورت مجذور مربعات، روش‌های متنوعی وجود دارد. بعضی از آن‌ها با استفاده از تجزیه‌ی چولسکی و مشتقات آن، سعی در ارائه‌ی یک الگوریتم سریع و کم‌خطا برای انتشار مجذور مربعات ماتریس‌های کواریانس حالت دارند. از معروف‌ترین این روش‌ها می‌توان به الگوریتم پاتر<sup>۵</sup> اشاره نمود که در دهه‌ی ۶۰ برای ناوبری ماهواره‌های شرکت ناسا<sup>۶</sup> طراحی شده بود. در بعضی دیگر از روش‌ها، با استفاده از الگوریتم‌های مختلف قطری‌سازی، مجذور ماتریس کواریانس حالت به صورت یک ماتریس بالامثلثی (یا پایین‌مثلثی) در آمده و سپس به مرحله‌ی بعد منتقل می‌شود. انتقال مجذور ماتریس با این حالت سبب می‌شود که همواره یک ماتریس کواریانس حالت متقارن، مثبت و نیمه‌معین داشته باشیم. از معروف‌ترین این روش‌ها می‌توان به تجزیه‌ی  $U-D$  و تجزیه‌ی  $QR$  اشاره نمود. هر کدام از دو تجزیه‌ی فوق را می‌توان

که در آن  $Q$  یک ماتریس یکانی<sup>۱</sup> است به‌طوری‌که  $(QQ^H = I)$ . ستون‌های ماتریس  $Q$  به‌صورت دوجه‌دو متعامد یکه<sup>۲</sup> هستند. به عبارت دیگر:

$$\|q_i\| = 1, q_i^T q_j = 0 \quad i \neq j \quad (11)$$

هم‌چنین در  $(10)$ ، یک ماتریس بالامثلثی با المان‌های قطری مثبت است  $(R_{ii} > 0)$ . ماتریس  $A$  می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد. اگر حقیقی باشد  $Q^T Q = I$  و اگر مختلط باشد  $Q^H Q = I$  [۱۶]. در هر دو حالت، المان‌های  $R$  همواره حقیقی هستند. از تجزیه‌ی  $QR$  در بسیاری از کاربردها استفاده می‌شود، که یکی از رایج‌ترین آن‌ها استفاده از آن در حل مسائل خطی حداقل مربعات می‌باشد. در مبحث فیلترهای بی‌زی خطی، از این تجزیه برای پیاده‌سازی فیلترهای کالمن به‌صورت مجذور مربعات استفاده می‌شود [۸، ۹]. مزیت تجزیه‌ی  $QR$  این است که حتی اگر ماتریس  $A$  مثبت معین<sup>۳</sup> هم نباشد، می‌توان برای آن  $Q$  و  $R$  یافت. در برخی روش‌های مبتنی بر تجزیه‌ی  $UDU^T$ ، چون از تجزیه‌های مبتنی بر روش چولسکی استفاده می‌شود، ماتریس تجزیه‌شونده اگر مثبت هم نباشد باید حداقل معین باشد. اما در تجزیه‌ی  $QR$  این محدودیت تا حدی مرتفع شده است.

### ۳- روش پیشنهادی برای پیاده‌سازی MP-EKF به‌صورت مجذور مربعات

قبل از ارائه‌ی روش پیشنهادی برای پیاده‌سازی MP-EKF به‌صورت مجذور مربعات، لازم است در مورد اهمیت این کار کمی توضیح داده شود.

همان‌طور که می‌دانیم، در صورت انتخاب مقادیر اولیه‌ی مناسب، و درست بودن پارامترهای سیستم، انتظار می‌رود که خروجی فیلتر کالمن پایدار باشد. اما همیشه به این صورت نیست. اگر خطای گردکردن سخت‌افزاری که در آن فیلتر کالمن پیاده‌سازی شده است بالا باشد، این امکان وجود دارد که در فیلتر کالمن، به دلیل وجود المان‌های معکوس گرفته‌شده (رابطه‌ی ۶-د) و عمل‌گر تفریق (رابطه‌ی ۶-ب) در حین تخمین، ناپایداری‌هایی ایجاد شود. علت این ناپایداری به تخمین ماتریس کواریانس حالت بر می‌گردد. وجود عمل‌گر تفریق در رابطه‌ی (۶-ب) باعث می‌شود که عدد شرطی<sup>۴</sup>  $P_{k|k}^{(i)}$  افزایش یافته و این احتمال به وجود آید که معکوس آن وجود نداشته باشد و یا معکوس آن دارای المان‌های صفر یا نزدیک صفر در قطرهای ماتریس باشد.

<sup>۱</sup> Condition number

<sup>۵</sup> Potter

<sup>۶</sup> NASA

<sup>۱</sup> Unitary Matrix

<sup>۲</sup> Orthogonal

<sup>۳</sup> Positive Definite

استخراج شده است. خوانندگان می‌توانند در صورت ابهام در اثبات برخی از فرمول‌های ارائه شده در این مقاله، برای اطلاعات بیشتر به [۱۷] رجوع نمایند. حال ذکر دو نکته لازم است:

۱- هدف نهایی نویسندگان مرجع [۱۷]، پیاده‌سازی مجذور مربعات فیلتر کالمن نبوده، بلکه هدف آن‌ها استفاده از ماتریس‌های کواریانس حالت مجذور مربعات برای شناسایی پارامترهای سیستم‌های دینامیکی خطی مجهول با استفاده از ماکزیمم‌سازی امید (EM)<sup>۵</sup> بوده است.

۲- به دلیل وجود عمل‌گر تفریق در رابطه‌ی (۹-۵)، نمی‌توان از روش پیشنهادی در [۱۷] برای پیاده‌سازی SMP-EKF استفاده نمود. ما در این مقاله روشی را با الهام گرفتن از تجزیه‌ی QR پیشنهاد می‌کنیم که چنین مشکلی را مرتفع سازد.

اکنون به معرفی روش پیشنهادی برای پیاده‌سازی SMP-EKF می‌پردازیم. ماتریس‌هایی که در معادلات MP-EKF باید به صورت مجذور مربعات انتشار یابند،  $P_{k|k}^{(i)}$ ،  $P_{k+1|k}^{(i)*}$ ،  $N_k^{(i)}$  و  $P_{k+1|k}^{(i)}$  می‌باشند. معادله‌ی به‌روزرسانی برای به‌دست آوردن  $P_{k|k}^{(i)}$  (رابطه‌ی (۶-ب)) را به فرم مجذور مربعات پیاده‌سازی می‌کنیم. **لم (الف)**- از تجزیه‌ی QR زیر می‌توان  $(P_{k|k}^{(i)})^{1/2}$  را به دست آورد به‌طوری‌که  $P_{k|k}^{(i)} = (P_{k|k}^{(i)})^{1/2} (P_{k|k}^{(i)})^{T/2}$  (رابطه‌ی (۶-ب)) را ارضا می‌کند:

$$\begin{bmatrix} (R_k^L)^T & 0 \\ (P_{k|k-1}^{(i)})^{T/2} (C_k^L)^T & (P_{k|k-1}^{(i)})^{T/2} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} \\ 0 & \mathcal{R}_{22} \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

**اثبات**- با استفاده از خاصیت یکانی بودن Q، اگر طرفین رابطه‌ی (۱۲) را در ترانزپوزیته‌شان ضرب کنیم، خواهیم داشت [۱۷]:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (R_k^L)^T & 0 \\ (P_{k|k-1}^{(i)})^{T/2} (C_k^L)^T & (P_{k|k-1}^{(i)})^{T/2} \end{bmatrix}^T \\ & \times \begin{bmatrix} (R_k^L)^T & 0 \\ (P_{k|k-1}^{(i)})^{T/2} (C_k^L)^T & (P_{k|k-1}^{(i)})^{T/2} \end{bmatrix} = \\ & \left( \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} \\ 0 & \mathcal{R}_{22} \end{bmatrix} \right)^T \times \frac{(Q^T Q)}{I} \times \left( \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} \\ 0 & \mathcal{R}_{22} \end{bmatrix} \right) = \\ & \begin{bmatrix} R_k^L + C_k^L P_{k|k-1}^{(i)} (C_k^L)^T & C_k^L P_{k|k-1}^{(i)} \\ P_{k|k-1}^{(i)} C_k^T & P_{k|k-1}^{(i)} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11}^T \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{11}^T \mathcal{R}_{12} \\ \mathcal{R}_{12}^T \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12}^T \mathcal{R}_{12} + \mathcal{R}_{22}^T \mathcal{R}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۱۳)$$

با الگوریتم‌های عددی متنوعی، مانند الگوریتم هاوس هولدر<sup>۱</sup>، گرام اشمیت<sup>۲</sup> و غیره پیاده‌سازی نمود [۶، ۱۷]. الگوریتم هاوس هولدر در اکثر نرم‌افزارهای موجود در دنیا مانند Matlab به عنوان یک الگوریتم استاندارد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فیلتر MP-EKF به دو دلیل نسبت به خطاهای گردسازی آسیب‌پذیر است: ۱- وجود معادلات فیلتر کالمن ۲- استفاده از  $\xi_k^{(i)}$  در پیش‌بینی دوم بخش خطی ذرات. همان‌طور که می‌دانیم، فیلترهای ذره‌ای-حاشیه‌ای با تقسیم کردن توزیع‌های احتمالی شرطی به دو زیرمجموعه‌ی توزیع‌های خطی و غیرخطی مستقل، دقت بالای تخمین متغیرهای حالت را، با وجود ثابت نگه‌داشتن تعداد ذرات، برآورده می‌سازند. اما اگر بخواهیم در مدل‌های ترکیبی خطی-غیرخطی از اطلاعات ضمنی توزیع شرطی غیرخطی برای تخمین بهتر توزیع شرطی خطی استفاده کنیم، دیگر این توزیع‌ها نسبت به هم مستقل نخواهند بود. این شرایط باعث می‌شود که در صورت تخمین نادرست هر یک از توزیع‌ها، توزیع دیگر نیز تحت تاثیر قرار گیرد. برای مثال، در فیلترهای ذره‌ای بوت-استرپ (که MP-EKF جزء آن‌ها است) به دلیل استفاده از مدل دینامیکی به عنوان توزیع اهمیت و تاثیر متغیرهای حالت خطی در این توزیع، اگر پارامترهای اولیه‌ی فیلتر کالمن درست انتخاب نشوند، توزیع اهمیت صحیحی ایجاد نشده و فرایند نمونه‌برداری با مشکل روبه‌رو می‌شود. هم‌چنین، اگر توزیع اهمیت نامناسبی برای نمونه‌برداری انتخاب شود، با وجود انتخاب درست پارامترهای اولیه‌ی فیلتر کالمن، به دلیل تاثیر متغیر حالت غیرخطی در معادلات کالمن (معادله‌ی ۹)، پس از گذشت مدتی از فرایند فیلترینگ، ممکن است اطلاعات نادرستی از طریق  $\xi_k^{(i)}$  به معادلات کالمن تزریق شده و باعث ناپایداری معادلات فیلتر کالمن شود. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مقاوم‌سازی فیلتر MP-EKF اهمیت دوچندانی دارد، به خصوص این‌که از این فیلتر در یک محیط غیرگوسی-غیر ایستاد، برای پردازش سیگنال غیرخطی ECG استفاده می‌شود.

اکنون که اهمیت پیاده‌سازی مجذور مربعات MP-EKF (یا SMP-EKF<sup>۳</sup>) مشخص شد، به معرفی روش پیشنهادی در این مقاله می‌پردازیم. در مرجع [۱۷]، نویسندگان با استفاده از تجزیه‌ی QR، روشی را برای پیاده‌سازی فیلتر کالمن و نرم-کننده‌ی کالمن<sup>۴</sup> به صورت مجذور مربعات ارائه داده‌اند. بعضی از لم‌ها و اثبات‌های آورده شده در این مقاله نیز از مرجع [۱۷]

<sup>۱</sup> Kalman Smoother

<sup>۵</sup> Expectation Maximization

<sup>۱</sup> House Holder

<sup>۲</sup> Gram-Shmidt

<sup>۳</sup> Square-Root Marginalized Particle Extended Kalman Filter



لم (ج) - از تجزیه‌ی  $QR$  زیر می‌توان  $(N_k^{(i)})^{1/2}$  را به دست آورد به قسمی که  $N_k^{(i)} = (N_k^{(i)})^{1/2} (N_k^{(i)})^{T/2}$  رابطه‌ی (۹-ج) را ارضا می‌کند:

$$\begin{bmatrix} (P_{k|k}^{(i)})^{T/2} (A_k^{NL})^T \\ (Q_k^{NL})^{T/2} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

اثبات - با استفاده از همان استراتژی استفاده شده در اثبات لم (ب) و با ضرب طرفین (۲۰) در ترانزاده‌هایشان رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$(\mathcal{R}_1)^T \mathcal{R}_1 = A_k^{NL} P_{k|k}^{(i)} (A_k^{NL})^T + Q_k^{NL} = N_k^{(i)} \quad (21)$$

از (۲۱) به راحتی می‌توان فهمید که  $\mathcal{R}_1 = (N_k^{(i)})^{T/2}$  با به دست آوردن معادلات  $(N_k^{(i)})^{1/2}$  و  $(P_{k+1|k}^{(i)*})^{1/2}$ ، حال قادر خواهیم بود  $(P_{k+1|k}^{(i)})^{1/2}$  را محاسبه کنیم. اما استراتژی محاسبه‌ی  $(P_{k+1|k}^{(i)})^{1/2}$  به دلیل وجود عملگر تفریق در (۹-ه) با استراتژی‌های موجود در لم‌های (الف-ج) فرق دارد. لم (د) -  $(P_{k+1|k}^{(i)})^{T/2}$  را می‌توان با حل کردن معادله‌ی زیر به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} (P_{k+1|k}^{(i)})^{T/2} \\ (N_k^{(i)})^{T/2} (L_k^{(i)})^T \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} (P_{k+1|k}^{(i)*})^{T/2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

اثبات - ابتدا رابطه‌ی (۹-ه) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$P_{k+1|k}^{(i)*} = L_k^{(i)} N_k^{(i)} (L_k^{(i)})^T + P_{k+1|k}^{(i)} \quad (23)$$

رابطه‌ی (۲۳) را می‌توان به راحتی به صورت تجزیه‌ی  $QR$  تعریف نمود:

$$\begin{bmatrix} (P_{k+1|k}^{(i)})^{T/2} \\ (N_k^{(i)})^{T/2} (L_k^{(i)})^T \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} (P_{k+1|k}^{(i)*})^{T/2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

از آن جایی که مقادیر  $(P_{k+1|k}^{(i)*})^{T/2}$  و  $(N_k^{(i)})^{T/2} (L_k^{(i)})^T$  در طرفین معادله‌ی (۲۴) قبلاً محاسبه شده‌اند (روابط (۹-د)، (۱۸) و (۲۰) را ببینید)، با حل کردن معادله‌ی (۲۴) می‌توان مقادیر مجهول المان‌های  $(P_{k+1|k}^{(i)})^{T/2}$  را به دست آورد. برای این که این فرایند را بیشتر توضیح دهیم، با یک مثال ساده شروع می‌کنیم. در این مثال می‌خواهیم المان‌های ماتریس مثلثی  $(P_{k+1|k}^{(i)})^{T/2}$  را با فرض  $2 \times 2$  بودن اندازه‌ی ماتریس به دست آوریم. فرض کنید قبلاً  $(P_{k+1|k}^{(i)*})^{T/2}$  و  $(N_k^{(i)})^{T/2} (L_k^{(i)})^T$  را محاسبه کرده‌ایم و مقادیر آن‌ها به ترتیب برابر  $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$  و  $(P_{k+1|k}^{(i)*})^{T/2} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$

با استفاده از رابطه‌ی  $\mathcal{R}_{11}^{-T} \mathcal{R}_{11}^T = I$  بخش بالایی سمت راست رابطه‌ی (۱۳) را می‌توان این گونه نوشت:

$$\mathcal{R}_{12}^T \mathcal{R}_{11} = \mathcal{R}_{12}^T (\mathcal{R}_{11}^{-T} \mathcal{R}_{11}^T) \mathcal{R}_{11} = \mathcal{R}_{12}^T \mathcal{R}_{11}^{-T} (\mathcal{R}_{11}^T \mathcal{R}_{11}) = \mathcal{R}_{12}^T \mathcal{R}_{11}^{-T} (R_k^L + C_k^L P_{k|k-1}^{(i)} (C_k^L)^T) = P_{k|k-1}^{(i)} (C_k^L)^T \quad (14)$$

از رابطه‌ی (۱۴) می‌توان فهمید که:

$$\mathcal{R}_{12}^T \mathcal{R}_{11}^{-T} = P_{k|k-1}^{(i)} (C_k^L)^T (R_k^L + C_k^L P_{k|k-1}^{(i)} (C_k^L)^T)^{-1} = K_k^{(i)} \quad (15)$$

هم چنین بخش پایینی سمت راست رابطه‌ی (۱۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathcal{R}_{22}^T \mathcal{R}_{22} = P_{k|k-1}^{(i)} - \mathcal{R}_{12}^T \mathcal{R}_{12} \quad (16)$$

با استفاده از رابطه‌ی  $\mathcal{R}_{11}^{-T} \mathcal{R}_{11}^T = I$  و نتایج (۱۵) و (۱۶)،  $\mathcal{R}_{22}^T \mathcal{R}_{22}$  به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathcal{R}_{22}^T \mathcal{R}_{22} = P_{k|k-1}^{(i)} - (\mathcal{R}_{12}^T \mathcal{R}_{11}^{-T}) (\mathcal{R}_{11}^T \mathcal{R}_{12}) = P_{k|k-1}^{(i)} - K_k^{(i)} C_k^L P_{k|k-1}^{(i)} \quad (17)$$

از (۱۷) می‌توان به راحتی نتیجه گرفت که  $\mathcal{R}_{22}^T \mathcal{R}_{22} = P_{k|k}^{(i)}$  و

به بیان دیگر  $\mathcal{R}_{22} = (P_{k|k}^{(i)})^{T/2}$

در بخش قبل ذکر شد که معادلات به روزرسانی زمانی MP-EKF، با فیلتر کالمن تفاوت دارد. به همین دلیل نمی‌توان از معادلات موجود در [۱۷] برای مرحله‌ی به روزرسانی زمانی MP-EKF استفاده نمود.

اکنون به سراغ پیاده‌سازی مجذور مربعات به روزرسانی زمانی اول و دوم فیلتر MP-EKF برای به دست آوردن مجذور مربعات  $P_{k+1|k}^{(i)}$  می‌رویم. قبل از محاسبه‌ی  $(P_{k+1|k}^{(i)})^{1/2}$ ، باید  $(P_{k+1|k}^{(i)*})^{1/2}$  و  $(N_k^{(i)})^{1/2}$  را در اختیار داشته باشیم.

لم (ب) - از تجزیه‌ی  $QR$  زیر می‌توان  $(P_{k+1|k}^{(i)*})^{1/2}$  را به دست آورد به قسمی که  $P_{k+1|k}^{(i)*} = (P_{k+1|k}^{(i)*})^{1/2} (P_{k+1|k}^{(i)*})^{T/2}$  رابطه‌ی (۸-ب) را ارضا می‌کند [۱۷]:

$$\begin{bmatrix} (P_{k|k}^{(i)})^{T/2} (A_k^L)^T \\ (Q_k^L)^{T/2} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \bar{R}_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

اثبات - دوباره با استفاده از خاصیت یکانی بودن  $Q$ ، اگر طرفین (۱۸) را در ترانزاده‌هایشان ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$(\bar{R}_{11})^T \bar{R}_{11} = A_k^L P_{k|k}^{(i)} (A_k^L)^T + Q_k^L = P_{k+1|k}^{(i)*} \quad (19)$$

از (۱۹) می‌توان به راحتی نتیجه گرفت که  $\bar{R}_{11} = (P_{k+1|k}^{(i)*})^{T/2}$  [۱۷].

با ضرب ماتریس‌های بالا در ترانهاده‌هایشان و استفاده از روشی که در مثال قبلی ذکر شد، می‌توان المان‌های مجهول  $x_{11}, \dots, x_{1n}$  را به‌صورت زیر پیدا کرد:

$$x_{11} = \sqrt{a_{11}^2 - \sum_{i=1}^m r_{i1}^2} \quad (الف-۳۰)$$

$$x_{1k} = \frac{a_{11}a_{1k} - \sum_{i=1}^m r_{i1}r_{ik}}{x_{11}} \quad k = 2, \dots, n \quad (ب-۳۰)$$

مشابه بالا، المان‌های مجهول  $x_{11}, \dots, x_{1n}$  به‌صورت زیر یافت می‌شوند:

$$x_{22} = \sqrt{a_{22}^2 + a_{12}^2 - x_{12}^2 - \sum_{i=1}^m r_{i2}^2} \quad (الف-۳۱)$$

$$x_{2k} = \frac{a_{12}a_{1k} + a_{22}a_{2k} - x_{12}x_{1k} - \sum_{i=1}^m r_{i2}r_{ik}}{x_{22}} \quad k = 3, \dots, n \quad (ب-۳۱)$$

به همین ترتیب المان‌های  $k$ -امین سطر از ماتریس  $(P_{k+1|k}^{(i)})^T$  یعنی  $x_{kk}, \dots, x_{kn}$  به‌راحتی محاسبه می‌شوند:

$$x_{kk} = \sqrt{\sum_{i=1}^k a_{ik}^2 - \sum_{i=1}^{k-1} x_{ik}^2 - \sum_{i=1}^m r_{ik}^2} \quad k = 2, \dots, n \quad (الف-۳۲)$$

$$x_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^k a_{ij}a_{ik} - \sum_{i=1}^{k-1} x_{ij}x_{ik} - \sum_{i=1}^m r_{ij}r_{ik}}{x_{kk}} \quad k = 2, \dots, n, \quad j = k + 1, \dots, n \quad (ب-۳۲)$$

همان‌طور که در رابطه‌ی (۳۲) دیده می‌شود، در صورتی می‌توان المان‌های  $x_{kk}, \dots, x_{kn}$  را پیدا کرد که قبلاً  $x_{k-1k-1}, \dots, x_{k-1n}$  محاسبه شده باشند. به عبارت دیگر، فرایند محاسبه‌ی المان‌های  $(P_{k+1|k}^{(i)})^T$  باید به‌صورت ستونی و از بالا به پایین و از چپ به راست انجام شود. با استفاده از الگوریتم مذکور می‌توان SMP-EKF را با روابط ریاضی بسیار ساده پیاده‌سازی کرد.

#### ۴- آزمایش‌های انجام شده

برای بررسی عمل کرد SMP-EKF، ۲۰۰ سیگنال ۳۰ ثانیه‌ای از ۱۸ نمونه‌ی مختلف موجود در پایگاه داده‌ی MIT-BIH Normal Sinus Rhythm [۱۸] انتخاب شد. به‌طور متوسط از هر نمونه از این پایگاه، حدود ۲۰ سیگنال از بخش‌های مختلف استخراج گردید. این سیگنال‌ها فقط حاوی ضربان‌های طبیعی بودند. سپس عمل کرد SMP-EKF را در حضور ۴ نوع نویز اضافه شونده‌ی سفید گوسی، صورتی، قهوه‌ای و MA با عمل کرد

می‌باشد. هم‌چنین فرض کنید  $(N_k^{(i)})^{T/2} (L_k^{(i)})^T = \begin{bmatrix} r_1 & r_3 \\ r_2 & r_4 \end{bmatrix}$  که ماتریس مجهول  $(P_{k+1|k}^{(i)})^T$  به شکل  $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix}$  باشد. برای یافتن مقادیر  $x_1, x_2$  و  $x_3$  معادله‌ی (۲۴) به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \\ r_1 & r_3 \\ r_2 & r_4 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲۵)$$

با ضرب طرفین (۲۵) در ترانهاده‌هایشان، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + r_1^2 + r_2^2 & x_1x_2 + r_1r_3 + r_2r_4 \\ x_1x_2 + r_1r_3 + r_2r_4 & x_2^2 + x_3^2 + r_3^2 + r_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{bmatrix} \quad (۲۶)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲۶)، مقادیر مجهول  $x_1, x_2$  و  $x_3$  به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$x_1 = \sqrt{a^2 - (r_1^2 + r_2^2)} \quad (الف-۲۷)$$

$$x_2 = \frac{ab - (r_1r_3 + r_2r_4)}{x_1} = \frac{ab - (r_1r_3 + r_2r_4)}{\sqrt{a^2 - (r_1^2 + r_2^2)}} \quad (ب-۲۷)$$

$$x_3 = \sqrt{b^2 + c^2 - (x_2^2 + r_3^2 + r_4^2)} \quad (ج-۲۷)$$

در حالت کلی،  $(P_{k+1|k}^{(i)})^T$  در هر اندازه‌ای باشد، می‌توان با استفاده از معادله‌ی (۲۵) آن را محاسبه کرد. فرض کنید  $(N_k^{(i)})^{T/2} (L_k^{(i)})^T$  و دو ماتریس  $n \times n$  و  $(P_{k+1|k}^{(i)*})^T$  و  $(P_{k+1|k}^{(i)})^T$  یک ماتریس  $m \times n$  باشند:

$$(P_{k+1|k}^{(i)*})^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (الف-۲۸)$$

$$(P_{k+1|k}^{(i)})^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \quad (ب-۲۸)$$

$$(N_k^{(i)})^{T/2} (L_k^{(i)})^T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad (ج-۲۸)$$

در این حالت اگر معادله‌ی (۲۵) را بنویسیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nn} \\ r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (۲۹)$$

برای مقایسه کمی الگوریتم‌ها در هر دو آزمایش از معیار بهبود SNR بهره بردیم. این معیار به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{imp}[dB] &= \text{SNR}_{\text{output}} - \text{SNR}_{\text{input}} \\ &= 10 \log \left( \frac{\sum_i |x_n(i) - x_o(i)|^2}{\sum_i |x_d(i) - x_o(i)|^2} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

که در آن  $x_d$ ،  $x_o$ ،  $x_n$  به ترتیب سیگنال نویزی، سیگنال اصلی و سیگنال فیلتر شده هستند. معیار بهبود SNR اگرچه از نگاه پردازش سیگنال، یک معیار خوب برای ارزیابی روش‌های حذف نویز، فشرده‌سازی و غیره است، اما از نگاه حفظ اطلاعات تشخیصی-کلینیکی ECG، یک معیار کافی برای ارزیابی یک روش نیست. به همین دلیل برای مقایسه کیفی SMP-EKF و MP-EKF از معیار  $\text{MSEWPRD}^3$  استفاده کردیم [۲۰]. برای محاسبه این معیار، ابتدا سیگنال اصلی (قبل از اضافه کردن نویز) و سیگنال فیلتر شده تا چند سطح توسط تبدیل موجک تجزیه می‌شوند. فاصله‌ی وزن دار ضرایب موجک دو سیگنال نسبت به هم در هر سطح محاسبه شده و با هم جمع می‌شوند. هرچقدر اندازه‌ی این معیار برای یک روش خاص کمتر باشد، آن روش از لحاظ حفظ ویژگی‌های تشخیصی، بهتر عمل کرده است. تعداد سطوح تجزیه‌ی موجک برای محاسبه این معیار به فرکانس نمونه‌برداری و ماهیت فرکانسی سیگنال ECG بستگی دارد. در مورد سیگنال ECG، که هم دارای بخش‌های فرکانس بالا (کمپلکس تیز QRS) و هم بخش‌های فرکانس پایین، مانند موج‌های P و T است، یک تجزیه‌ی موجک مناسب، تجزیه‌ی آن است که در خروجی آن، ضرایب تقریب موجک فقط مربوط به موج‌های P و T بوده و ضرایب جزئیات فقط مربوط به کمپلکس QRS باشند. بر اساس این فرض و این‌که فرکانس نمونه‌برداری سیگنال‌های آزمایشی ما ۱۲۸ هرتز بودند، تعداد سطوح  $L=4$  انتخاب شد. تابع موجک مورد استفاده نیز از نوع تابع دوطرفه‌ی متعامد<sup>۴</sup> Daubechies 9/7 انتخاب شد که در پردازش ECG قابلیت خود را نشان داده است [۲۱]. از لحاظ ریاضی، معیار  $\text{MSEWPRD}$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{MSEWPRD} &= w_{A_L} \times \left( \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_{A_L}} [A_L(k) - \bar{A}_L(k)]^2}{\sum_{k=1}^{N_{A_L}} [A_L(k)]^2}} \times 100 \right) + \\ &\sum_{j=1}^L w_{D_j} \times \left( \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_{D_j}} [D_j(k) - \bar{D}_j(k)]^2}{\sum_{k=1}^{N_{D_j}} [D_j(k)]^2}} \times 100 \right) \end{aligned} \quad (35)$$

<sup>۳</sup> Multi-Scale Entropy Based weighted Distortion Measure

<sup>۴</sup> Bi-orthogonal

MP-EKF پیشنهادی در [۵] مقایسه و بررسی کردیم. نویز اضافه شونده‌ی آرتیفکت ماهیچه (MA) واقعی بود که از پایگاه داده‌ی MIT-BIH Noise Stress Test [۱۹] انتخاب شده بود. از آن‌جا که فرکانس نمونه‌برداری سیگنال‌های پایگاه داده‌ی MIT-BIH Normal Sinus Rhythm، ۱۲۸ هرتز و فرکانس نمونه‌برداری نویز MA، ۳۶۰ هرتز بود، مجبور شدیم نویز را مجدداً نمونه‌برداری کنیم تا دارای فرکانسی برابر ۱۲۸ هرتز شود. نحوه‌ی ایجاد نویزهای سفید گوسی، صورتی و قهوه‌ای، بر خلاف نویز MA به صورت مصنوعی و بر اساس یک طیف فرکانسی مصنوعی به معادله‌ی زیر بود:

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\beta} \quad (33)$$

در رابطه‌ی بالا، به ازای مقادیر مختلف  $\beta$  می‌توان محدوده‌ی وسیعی از نویزهای مختلف را ایجاد کرد. اگر  $\beta = 0$ ، نویز سفید گوسی،  $\beta = 1$ ، نویز صورتی و اگر  $\beta = 2$ ، نویز قهوه‌ای تولید خواهد شد. از نگاه آماری، با افزایش  $\beta$  نویز ایجاد شده بیشتر غیر-ایستاد<sup>۱</sup> خواهد شد. در این‌جا باید این نکته را خاطر نشان کنیم که از آن‌جایی که ساختار SMP-EKF ما با MP-EKF چه در استراتژی وزن‌دهی و چه در معادلات نمونه‌برداری یکسان است، انتظار اولیه‌ی ما از این آزمایش‌ها این است که عملکرد SMP-EKF و MP-EKF بسیار نزدیک به هم باشد و MP-EKF برتری محسوسی نسبت به SMP-EKF نداشته باشد. هدف از انجام آزمایش‌ها این است که دریابیم که با پیاده‌سازی معادلات به‌روزرسانی زمانی و اندازه‌گیری به صورت مجذور مربعات در SMP-EKF، آیا قدرت SMP-EKF به همان اندازه‌ی MP-EKF باقی خواهد ماند یا خیر. در صورت مثبت بودن پاسخ، می‌توانیم از SMP-EKF در سخت‌افزارهای با دقت محاسباتی محدود استفاده نماییم، چون هم از لحاظ ثنوریک، از MP-EKF مقاوم‌تر و هم از لحاظ عمل‌کرد، مشابه آن فیلتر عمل خواهد کرد. آزمایش‌های ما در ۱۱ SNR مختلف ناهم‌فاصله<sup>۲</sup> از  $\text{SNR}=10\text{dB}$  تا  $\text{SNR}=-5\text{dB}$  انجام شدند و مقادیر آن‌ها عبارت بود از: -5، -4، -3، -1، 0، 1، 2، 4، 6، 8، 10 دسی‌بل. به عبارت دیگر با کم شدن SNR-ها، فاصله‌ی آن‌ها نیز کمتر در نظر گرفته شده است. علت امر این بود که ما قصد داشتیم در نویزهای شدید، که در آن سیگنال ECG دیگر از مدل دینامیکی پیروی نمی‌کند و اندازه‌گیری‌ها نیز قابل‌اعتماد نیستند، عملکرد SMP-EKF را مورد ارزیابی دقیق‌تری قرار دهیم. در هر SNR، هر سیگنال یک نویز تصادفی با اندازه‌ی متفاوت دریافت می‌کرد.

<sup>۱</sup> Non-Stationary

<sup>۲</sup> Non-equidistant

ماهالانویس هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$d_{measur}^{(i),k} = \left[ \hat{z}_{k|k}^{NL,(i)} - s_k \hat{\phi}_{k|k}^{L,(i)} - \phi_k \hat{\omega}_{k|k}^{L,(i)} - \Omega_k \right]^T \times R_k^{-1} \times \left[ \hat{z}_{k|k}^{NL,(i)} - s_k \hat{\phi}_{k|k}^{L,(i)} - \phi_k \hat{\omega}_{k|k}^{L,(i)} - \Omega_k \right] \quad (37\text{-الف})$$

$$d_{synth}^{(i),k} = \left[ \hat{z}_{k|k}^{NL,(i)} - ECG_{synth}(k) \hat{\phi}_{k|k}^{L,(i)} - \phi_k \hat{\omega}_{k|k}^{L,(i)} - \Omega_k \right]^T \times R_k^{-1} \times \left[ \hat{z}_{k|k}^{NL,(i)} - ECG_{synth}(k) \hat{\phi}_{k|k}^{L,(i)} - \phi_k \hat{\omega}_{k|k}^{L,(i)} - \Omega_k \right] \quad (37\text{-ب})$$

در رابطه‌ی (37-ب)،  $ECG_{synth}$ ، یک سیگنال مصنوعی

است که بر اساس پارامترهای سازنده‌ی  $a_j, b_j, \theta_j$

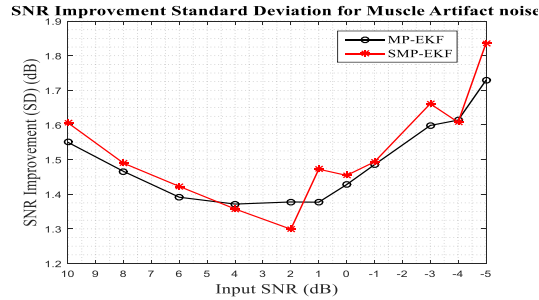
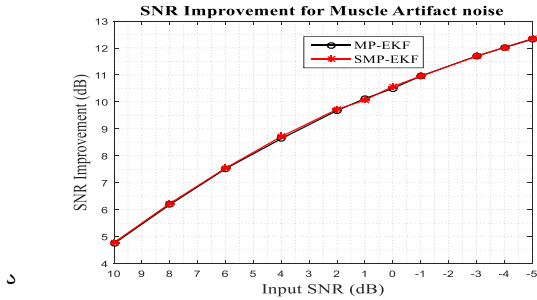
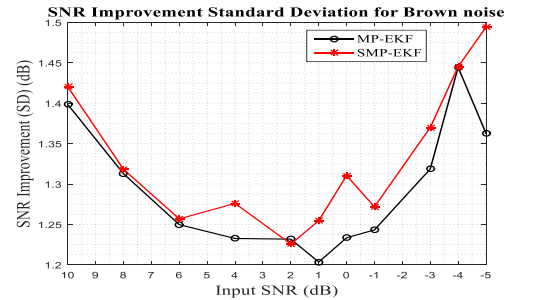
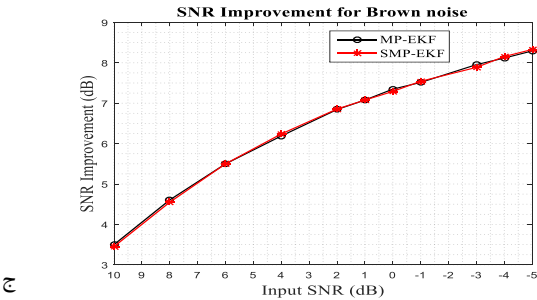
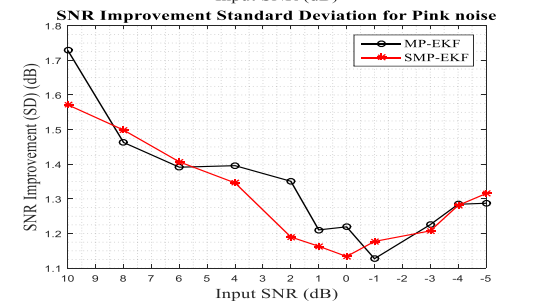
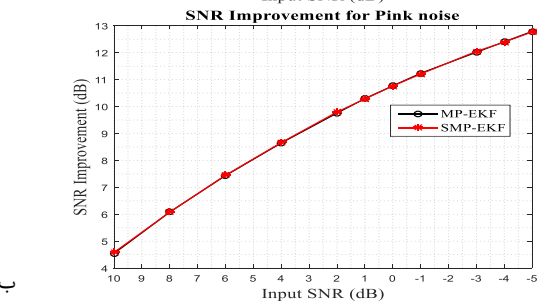
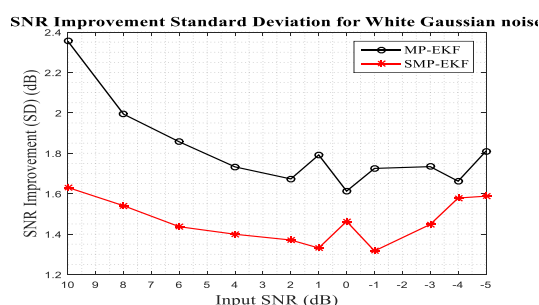
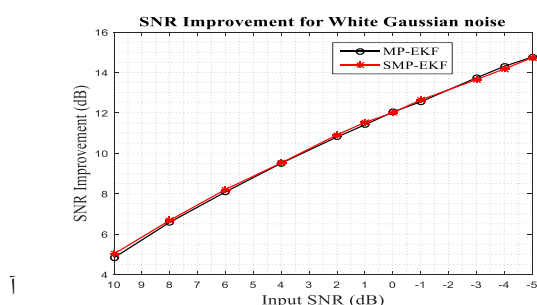
( $j \in P, Q, R, S, T$ ) ساخته می‌شود و برای هر سیگنال

آزمایشی منحصر به فرد است [5].

در رابطه‌ی اخیر،  $A_L$  و  $\tilde{A}_L$  به ترتیب تعداد سطوح، ضرایب تقریب سیگنال اصلی و سیگنال فیلترشده و  $D_j$  و  $\tilde{D}_j$  ضرایب جزئیات سیگنال اصلی و سیگنال فیلترشده در سطح  $j$ -ام هستند.  $w_{D_j}$  و  $w_{A_L}$  ( $j = 1, \dots, L$ ) وزن‌های تعیین‌شده در هر سطح هستند که بر اساس آنتروپی ضرایب سیگنال اصلی در هر سطح محاسبه می‌شوند. استراتژی وزن‌دهی برای هر دو فیلتر MP-EKF و SMP-EKF یکسان بود. وزن ذرات در هر دو فیلتر توسط رابطه‌ی زیر کنترل می‌شد:

$$w_k^{(i)} = e^{-d_{synth}^{(i),k}} + e^{-d_{measur}^{(i),k}} \quad i = 1, \dots, N \quad (36)$$

در رابطه‌ی بالا  $d_{synth}^{(i),k}$  و  $d_{measur}^{(i),k}$  هر دو از نوع فاصله

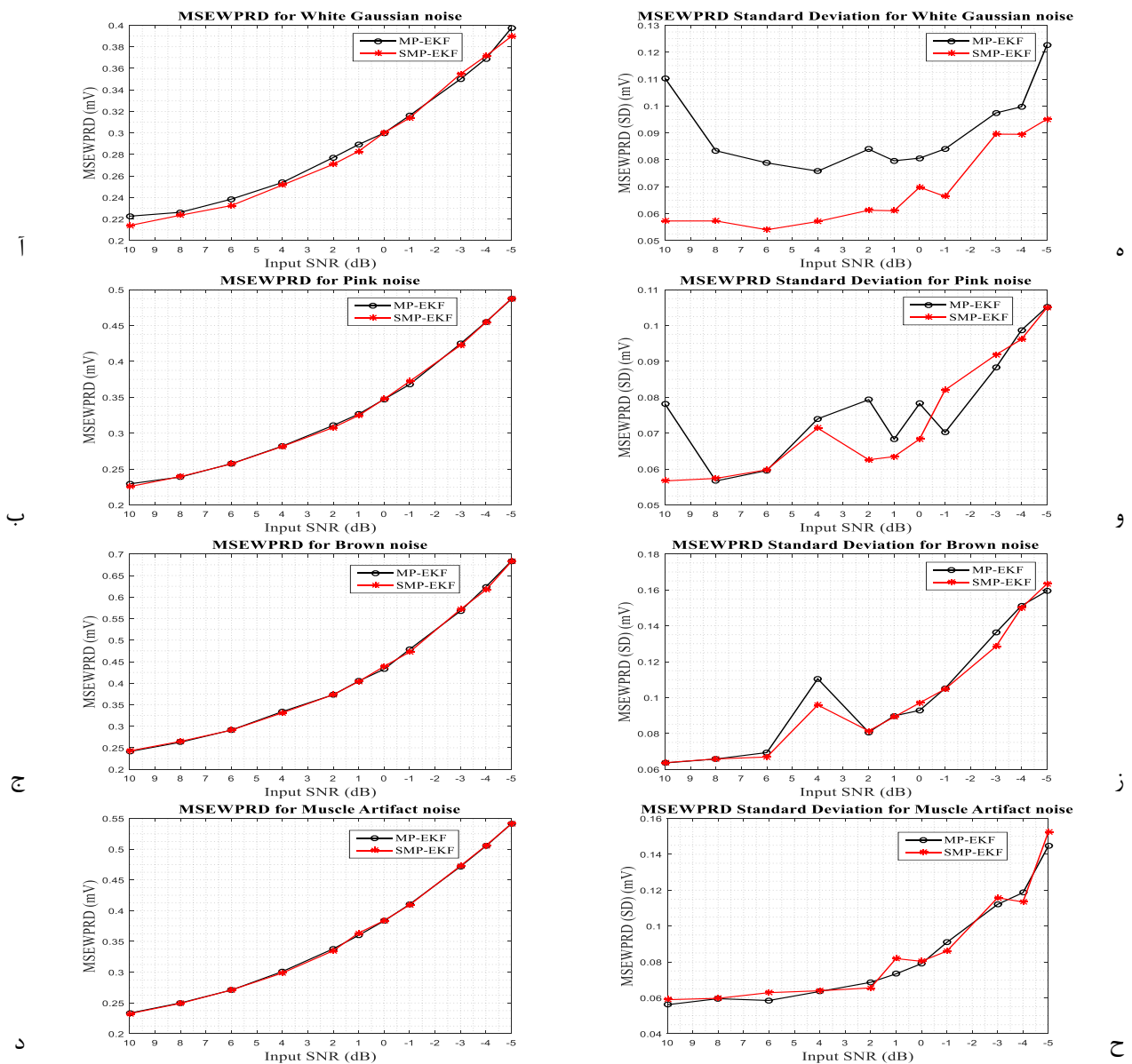


شکل (1) - مقایسه‌ی بهبود SNR (چپ) میانگین و (راست) انحراف معیار  $MP-EKF$  و  $SMP-EKF$  به ازای نویزهای (الف-ه) گوسی سفید،

(ب-و) صورتی، (ج-ز) قهوه‌ای، و (د-ح) آرتیفکت ماهیچه

مورفولوژی‌های مختلف ECG دارد. در مورد نویزهای صورتی، قهوه ای و نویز ماهیچه، در شکل (۱) باز هم می‌بینیم که از نگاه میانگین بهبود SNR، هر دو فیلتر MP-EKF و SMP-EKF عمل کرد مشابهی داشته‌اند. هم‌چنین در این نویزها از نگاه انحراف معیار بهبود SNR، در برخی SMP-EKF برتری نسبی داشته است. اما این تفاوت‌ها در این نویزهای غیر-ایستان، به نسبت تفاوت‌ها در انحراف معیارهای موجود در نویز ایستان گوسی بسیار ناچیز هستند. بنابراین می‌توان گفت که از نگاه بهبود SNR در نویزهای غیر-ایستان، SMP-EKF به مانند MP-EKF عمل می‌کند.

در شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب عمل کرد SMP-EKF با MP-EKF از نگاه بهبود SNR (میانگین و انحراف معیار) و MSEWPRD (میانگین و انحراف معیار) در ۴ نوع نویز مختلف با هم مقایسه شده است. با نگاهی به این دو شکل، این نکته درک می‌شود که در برخی SNR-ها و برخی نویزها عمل کرد MP-EKF با SMP-EKF تفاوت دارد. به عنوان مثال در شکل (۱)، در نویز گوسی با وجود این که عمل کرد MP-EKF و SMP-EKF از نگاه میانگین بهبود SNR بسیار شبیه به هم است، اما از نگاه انحراف معیار بهبود SNR (شکل ۱-ه)، SMP-EKF از MP-EKF بهتر عمل نموده است. به بیان دیگر، کم بودن انحراف معیار بهبود SNR در شکل (۱-ه) بیان‌گر این نکته است که در نویز گوسی، SMP-EKF عمل کرد ثابت‌تری را نسبت به MP-EKF در انواع

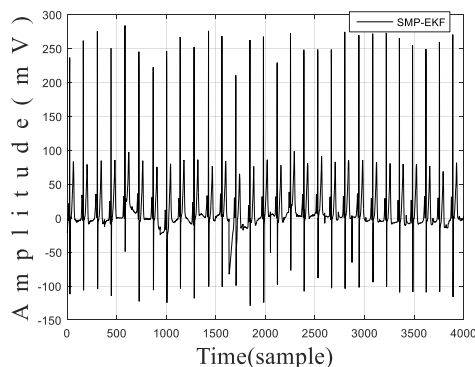
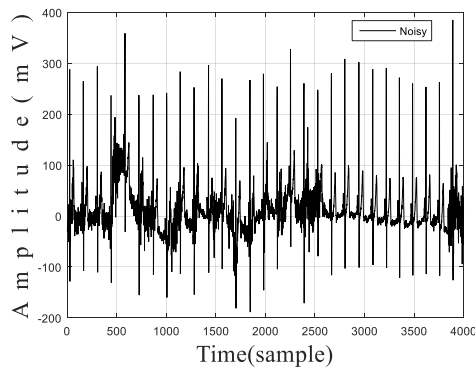
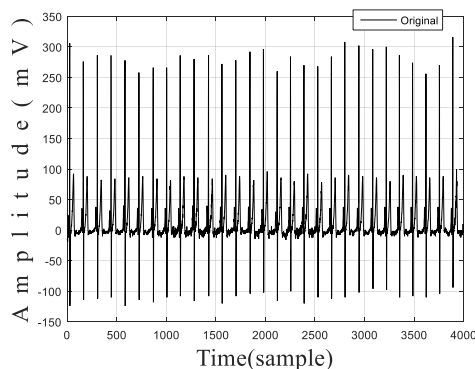
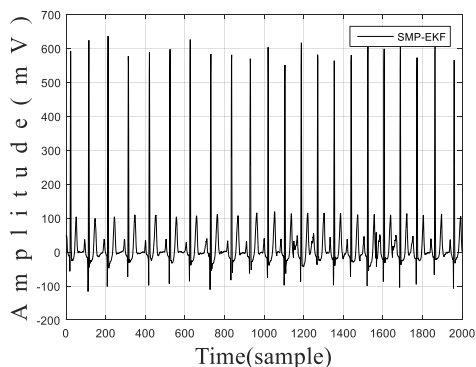
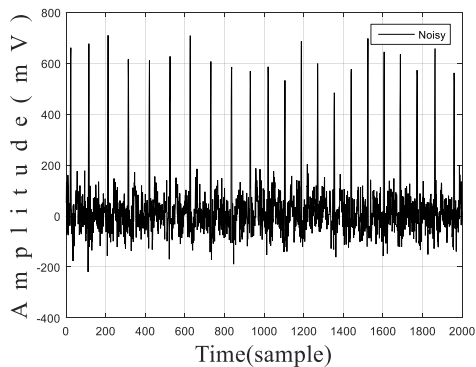
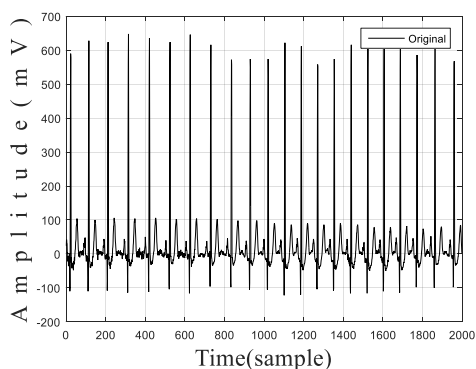


شکل (۲) - مقایسه‌ی MSEWPRD (چپ) میانگین و (راست) انحراف معیار SMP-EKF و MP-EKF به ازای نویزهای (الف-ه) گوسی سفید،

(ب-و) صورتی، (ج-ز) قهوه‌ای، و (د-ح) آرتیفکت ماهیچه

می‌دهند. در کل، نتایج موجود در شکل (۲) بیان‌گر این نکته است که در نویزهای غیر-ایستان و ایستان، از نگاه حفظ پارامترهای تشخیصی-کلینیکی، SMP-EKF مشابه MP-EKF عمل می‌کند. از نگاه محاسباتی، تعداد محاسبات SMP-EKF نسبت به MP-EKF بیشتر است. آزمایش‌های ما نشان دادند که زمان محاسباتی لازم برای SMP-EKF نسبت به MP-EKF ۲۰ درصد بیشتر است. در شکل‌های (۳) و (۴) عمل‌کرد نویز زدایی SMP-EKF در حضور دو نویز مختلف (گوسی سفید و آرتیفکت ماهیچه) در دو قطعه سیگنال ECG که از نمونه‌های استخراج‌شده هستند، نشان داده شده است. همان‌طور که از این دو شکل پیداست، SMP-EKF قابلیت خوبی را در حذف هر دو نوع نویز ایستان و غیر-ایستان از خود نشان داده است.

یکی از دلایلی که در این مقاله عمل‌کرد SMP-EKF مشابه MP-EKF بود، این است که تمامی شبیه‌سازی‌ها در یک رایانه با دقت محاسباتی بالا انجام شده بود. اما اگر همین شبیه‌سازی‌ها در یک سخت‌افزار با دقت محاسباتی پایین انجام شده بودند، از لحاظ تئوریک، SMP-EKF نتایج بهتری را ارائه می‌داد. از نگاه حفظ پارامترهای تشخیصی-کلینیکی (معیار MSEWPRD)، با مشاهده‌ی شکل (۲) می‌توان دریافت که در نویزهای گوسی، این SMP-EKF است که از نگاه میانگین و انحراف MSEWPRD نسبت به رقیب خود برتری نسبی داشته است. اما همین برتری نسبی در نویزهای غیر-ایستان مشاهده نمی‌شود و هر دو فیلتر از نگاه MSEWPRD، عمل‌کرد مشابهی را در نویزهای صورتی، قهوه‌ای و نویز ماهیچه از خود نشان



شکل (۴) - نتایج فیلترینگ به ازای نمونه‌ی «۱۶۷۸۶» در حضور نویز سفید گوسی با  $SNR = 6dB$  (الف) سیگنال اصلی (ب) سیگنال نویزی (ج) خروجی SMP-EKF

شکل (۳) - نتایج فیلترینگ به ازای نمونه‌ی «۱۶۲۷۲» در حضور نویز ماهیچه با  $SNR = 3dB$  (الف) سیگنال اصلی (ب) سیگنال نویزی (ج) خروجی SMP-EKF

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش نوین و ابتکاری برای پیاده‌سازی MP-EKF به صورت مجذور مربعات پیشنهاد شده است. هرچند که استفاده از این روش بار محاسباتی بیشتری نسبت به MP-EKF معمولی دارد، اما استفاده از این روش خصوصاً در سیستم‌ها و سخت‌افزارهای با قدرت محاسباتی محدود سبب افزایش مقاومت MP-EKF نسبت به خطاهای گردسازی و در نتیجه بهبود تخمین می‌شود. روش پیشنهادی روی مجموعه‌ای از سیگنال‌های ECG واقعی استخراج شده از پایگاه داده‌ی MIT-BIH Normal Sinus Rhythm در ۴ نوع نویز مختلف گوسی سفید، صورتی، قهوه‌ای و آرتیفکت ماهیچه آزمایش شد و نتایج خروجی‌های آن با فیلتر MP-EKF از نگاه دو معیار بهبود SNR و MSEWPRD مقایسه گردید. مقایسه‌های نتایج آزمایش‌ها نشان دادند که عملکرد روش پیشنهادی بسیار شبیه به MP-EKF معمولی می‌باشد و می‌تواند جانشینی مناسب (و در عین حال مقاوم‌تری) برای MP-EKF سخت‌افزارهای با دقت محدود باشد.

## ۶- مراجع

- [8] T. Kailath, A. H. Sayed, and B. Hassibi, *Linear estimation* vol. 1: Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [9] M. L. Psiaki, "Square-root information filtering and fixed-interval smoothing with singularities," in *Proc. American Control Conference, 1998. Proceedings of the 1998*, 1998, pp. 2744-2748.
- [10] H. D. Hesar and M. Mohebbi, "An Adaptive Particle Weighting Strategy for ECG Denoising Using Marginalized Particle Extended Kalman Filter: an Evaluation in Arrhythmia Contexts," *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, vol. 21, no. 6, pp. 1581-1592, 2017.
- [11] R. Sameni, M. B. Shamsollahi, C. Jutten, and G. D. Clifford, "A nonlinear Bayesian filtering framework for ECG denoising," *IEEE Trans. Biomedical Engineering*, vol. 54, no. 12, pp. 2172-2185, 2007.
- [12] M. Akhbari, M. B. Shamsollahi, C. Jutten, A. A. Armoundas, and O. Sayadi, "ECG denoising and fiducial point extraction using an extended Kalman filtering framework with linear and nonlinear phase observations," *Physiological measurement*, vol. 37, no. 2, p. 203, 2016.
- [13] G. Clifford, A. Shoeb, P. McSharry, and B. Janz, "Model-based filtering, compression and classification of the ECG," *International Journal of Bioelectromagnetism*, vol. 7, no. 1, pp. 158-161, 2005.
- [14] O. Sayadi and M. Shamsollahi, "A model-based Bayesian framework for ECG beat segmentation," *Physiological Measurement*, vol. 30, no. 3, pp. 335-352, 2009.
- [15] T. Schon, F. Gustafsson, and P.-J. Nordlund, "Marginalized particle filters for mixed linear/nonlinear state-space models," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 7, pp. 2279-2289, 2005.
- [16] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix computations* vol. 3: JHU Press, 2012.
- [17] S. Gibson and B. Ninness, "Robust maximum-likelihood estimation of multivariable dynamic systems," *Automatica*, vol. 41, no. 10, pp. 1667-1682, 2005.
- [18] The MIT-BIH Normal Sinus Rhythm Database. PhysioNet, Cambridge, MA [Online]. Available: [http://www.physionet.org/physiobank/d\\_ata-base/nsrdb/](http://www.physionet.org/physiobank/d_ata-base/nsrdb/)
- [19] The MT-BIH Noise Stress Test Database. PhysioNet, Cambridge, MA [Online]. Available: [http://www.physionet.org/physiobank/d\\_ata-base/nstadb/](http://www.physionet.org/physiobank/d_ata-base/nstadb/)
- [20] M. S. Manikandan and S. Dandapat, "Multiscale entropy-based weighted distortion measure for ECG coding," *Signal Processing Letters, IEEE*, vol. 15, pp. 829-832, 2008.
- [21] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, and I. Daubechies, "Image coding using wavelet transform," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 1, no. 2, pp. 205-220.1992 ,
- [1] R. Sameni, M. B. Shamsollahi, and C. Jutten, "Model-based Bayesian filtering of cardiac contaminants from biomedical recordings," *Physiological Measurement*, vol. 29, no. 5, pp. 595-613, May 2008.
- [2] R. Sameni, M. B. Shamsollahi, C. Jutten, and G. D. Clifford, "A nonlinear Bayesian filtering framework for ECG denoising," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 54, no. 12, pp. 2172-2185, 2007.
- [3] O. Sayadi and M. B. Shamsollahi, "ECG denoising and compression using a modified extended Kalman filter structure," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 55, no. 9, pp. 2240-2248, 2008.
- [4] P. E. McSharry, G. D. Clifford, L. Tarassenko, and L. A. Smith, "A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 50, no. 3, pp. 289-294, 2003.
- [5] H. Hesar and M. Mohebbi, "ECG Denoising Using Marginalized Particle Extended Kalman Filter with an Automatic Particle Weighting Strategy," *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, vol. 21, no. 3, pp. 635-644, 2016.
- [6] D. Simon, *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*: John Wiley & Sons, 2006.
- [7] G. Girija, J. Raol, R. A. Raj, and S. Kashyap, "Tracking filter and multi-sensor data fusion", *SADHANA-BANGALORE*-, vol. 25, no. 2, pp. 159-168, 2000.