DOI: 10.22041/ijbme.2009.13403

Deblurring of Ultrasonic Images Based on Iterative Gradient Algorithm, Anisotropic Window and Complex Wavelet-Based Denoising

H. Rabbani

Assistant Professor, Department of Physics & Biomedical Engineering, School of Medicine, Isfahan Univ. of Medical Sciences
Medical Image and Signal Processing Research Center, Isfahan, Iran

Abstract

In this paper, ultrasonic images are initially deblurred using Gradient method and then the estimations of image and point spread function (PSF) are improved using denoising techniques. For this reason, at first a criterion with appropriate regularizers (that results in preservation of the edges) is defined for the iterative Gradient method, then the estimation of PSF is improved using a denoising technique based on using an anisotropic window around each pixel. The initial estimation of image is also improved using a denoising method in complex wavelet domain that proposes maximum a posteriori (MAP) estimator and local Laplacian prior density function. Using these denoising methods on top of Gradient method causes that our algorithm reduces the visual artifacts and preserves the edges in the deblurred images. Our simulations show that the proposed method in this paper outperforms other methods visually and quantitatively.

Keywords: **Ultrasonic images, blurring, Gradient algorithm, denoising, video processing, blind deconvolution.**

* **Corresponding author**
Address: *Medical Image and Signal Processing Research Center, Hezar Jarib Ave., Isfahan, Iran*
Department of Physics & Biomedical Engineering, School of Medicine, Isfahan Univ. of Medical Sciences, Hezar Jarib Ave., Isfahan, Iran
Tel: *+98 311 7922362; +98 311 7922474*
Fax: *+98 311 6687898, +98 311 6688597*
E-mail: *h_rabbani@med.mui.ac.ir*

DOI: 10.22041/ijbme.2009.13403

جبران ماتي تصاوير اولتراسوند با استفاده از الگوريتم تكراري گراديان و بهبود كيفيت به وسيله پنجره تطبيقي و الگوريتم كاهش اغتشاش در حوزه ويولت مختلط

حسين رباني

استاديار گروه فيزيك و مهندسي پزشكي، دانشكده پزشكي، دانشگاه علوم پزشكي اصفهان
عضو هيئت علمي مركز تحقيقات پردازش تصوير و سيگنال پزشكي

چكيده

در اين مقاله چگونگي بهبود محوشدگي تصاوير اولتراسوند با استفاده از الگوريتمي تكراري مبتني بر تخمين اوليه داده‌هاي تميز و تابع محوشدگي بر اساس روش كمينه كردن گراديان خطا (روش نيوتن) و ارتقاء كيفيت اين تخمين‌ها با استفاده از روش‌هاي كاهش اغتشاش مناسب ارائه شده است. بر اين اساس با تعريف تابع خطاي مناسب، تخمين اوليه موجب حفظ لبه‌هاي تصوير مي‌شود و سپس تخمين اوليه تابع محوشدگي بر اساس روش كاهش تطبيقي اغتشاش كه براي هر پيكسل پنجره محلي و غيرهمسانگرد با شكل متناسب انتخاب مي‌كند، بهبود مي‌يابد. همچنين تخمين اوليه داده‌هاي تميز با استفاده از روش كاهش اغتشاش مبتني بر تئوري بيز در حوزه ويولت مختلط ارتقاء مي‌يابد. استفاده از روش‌هاي كاهش اغتشاش مذكور مانع از ايجاد آرتيفكت‌هاي بصري در محل‌هاي هموار تصاوير و همچنين محوشدگي لبه‌هاي اصلي تصاوير مي‌شود. نتايج شبيه‌سازي‌هاي صورت گرفته حاكي از موفقيت قابل توجه اين روش در عمليات حذف محوشدگي در مقايسه با ديگر روش‌هاي ارائه شده در سال‌هاي اخير دارد.

كليدواژگان: تصاوير اولتراسوند، كاهش محوشدگي، الگوريتم گراديان، كاهش اغتشاش.

عهده‌دار مكاتبات★

نشاني: اصفهان، خيابان هزار جريب، دانشگاه علوم پزشكي اصفهان، مقابل ساختمان شماره ۴، مركز تحقيقات پردازش تصوير و سيگنال پزشكي
اصفهان، خيابان هزار جريب، دانشگاه علوم پزشكي اصفهان، دانشكده پزشكي، گروه فيزيك و مهندسي پزشكي
تلفن: ۷۹۲۲۳۶۲-۰۳۱۱؛ ۷۹۲۲۴۷۴-۰۳۱۱، **دورنگار:** ۶۶۸۷۸۹۸-۰۳۱۱؛ ۶۶۸۸۵۹۷-۰۳۱۱، **پيام نگار:** h_rabbani@med.mui.ac.ir

۱- مقدمه

معمولاً تصاوير اولتراسوند را مي‌توان به صورت كانولوشن[1] دوبعدي پالس ساتع شده و بازتاب‌هاي صوتي بافت تصوير گيري شده مدل نمود. براين اساس معمولاً تصاوير اخذ شده دچار محوشدگي[2] مي‌شوند [۱]. اين محوشدگي را مي‌توان با استفاده از كانولوشن تابع پراكندگي نقطه[3] (PSF) مدل نمود. بر اين اساس، با احتساب اثر اغتشاش، تصوير دريافتي را مي‌توان در قالب معادله (۱) ارائه كرد:

$$y(k) = p(k) \times x(k) + n(k) \qquad (۱)$$

كه در آن Y(K)، X(K) و P(K) به ترتيب تصوير مشاهده شده، تصوير تميز اوليه و PSF در نقطه K هستند و N(K) به طور معمول به صورت اغتشاش سفيد گوسي[4] با ميانگين صفر و انحراف معيار ΣN مدل مي‌شود.

در برخي از موارد تابع PSF معلوم فرض مي‌شود و بنابراين تخمين تبديل فوريه x(k) (كه آن را $\hat{x}(f)$ مي‌ناميم) را مي‌توان به‌صورت $\hat{y}(f)/\hat{p}(f)$ در نظر گرفت [۳]. معمولاً $\hat{p}(f)$ در نقاطي برابر صفر (يا نزيک به صفر) خواهد بود كه به خراب شدن تخمين مذكور منجر مي‌شود. بر اين اساس معمولاً با استفاده از يک پارامتر تعديل كننده ε، تخمين به صورت معادله (۲) اصلاح مي‌شود:

$$\hat{x}^{est}(f) = \frac{\hat{y}(f)\hat{p}(-f)}{|\hat{p}(f)|^2 + \varepsilon^2} \qquad (۲)$$

گرچه تاكنون روش‌هاي متعددي براي بازيابي تصوير مشروط به معلوم بودن PSF ارائه شده است، اما در عمل PSF نيز معلوم نبوده و بايد تخمين زده شود. اين امر كه به دي‌كانولوشن پنهان[5] نيز موسوم است، معمولاً فقط با وجود يك مشاهده از صحنه مورد نظر به نتايج مطلوبي منجر نمي‌شود و وجود چندين مشاهده از يك صحنه به شرط وجود ميزان قابل قبولي از عدم شباهت بين فريم‌هاي مشاهده شده از يک صحنه[6]، به محاسبه دقيق (در حالت عدم وجود اغتشاش) و يا پايدار (در حالت وجود اغتشاش) منجر مي‌شود [۱، ۴].

براين اساس معمولاً از مشـاهدات چندگانـه از يـک صـحنه و پردازش اطلاعات حاصـل از آن بـراي بهبـود كيفيـت تصـوير استفاده مي شود [۵، ۶]. در ايـن صـورت از اطلاعـات اضـافي حاصل از مشاهدات چندگانه مي‌توان بهره گرفت.

براي يک مشاهده M كاناله، رابطه (۱) را مي‌توان براي هر كانال به صورت معادله (۳) بازنويسي كرد:

$$y_i(k) = p_i(k) \times x(k) + n_i(k), \qquad i = 1,\ldots,M \qquad (۳)$$

كه در آن NI(K) اغتشاش سفيد گوسي با واريانس ΣI است و براي رسيدن به پاسخ مطلوب M حداقل برابر ۳ انتخاب مي‌شود [۱].

تاكنون روش‌هاي متعددي براي به‌دست آوردن x(k) و pi(k) در رابطه ۳ پيشنهاد شده‌اند [۱، ۴-۱۲]. برخي از اين روش‌ها بر اساس الگوريتم حداقل مربعات خطا[9] هستند [۱، ۴]. در مرجع [۱] از معيار مربعات خطاي مرسوم به اضافه معياري مربوط به همبستگي كانال‌ها استفاده شده است كه به حفظ لبه‌ها منجر مي‌شود. در مرجع [۱۲] روش ذكر شده براي حالتي كه تصاوير اخذ شده از كانال‌ها نسبت به هم تغييرات مكاني داشته باشند[9] توسعه داده شده است. بر اساس روش مطرح شده در مرجع [۱] معيار مورد استفاده براي روش گراديان در بخش ۲ توضيح داده مي‌شود. در بخش ۳ نيز الگوريتم به‌كار رفته براي تخمين اوليه تصوير تميز و توابع محوشدگي بر اساس كمينه كردن معيار ارائه شده در بخش ۲، ارائه مي‌شود.

روش‌هاي ارائه شده براي دي‌كانولوشن را مي‌توان از ديدگاه‌هاي گوناگون تقسيم‌بندي كرد. به عنوان نمونه دسته‌اي از روش‌ها از كپستروم[11] [۱۳] و دسته‌اي ديگر از روش‌ها از طيف‌هاي مرتبه بالا[12] [۱۴] براي دي‌كانولوشن استفاده مي‌كنند. در سال‌هاي اخير با توجه به پيشرفت قابل توجه روش‌هاي كاهش اغتشاش، روش‌هاي مبني بر عمليات كاهش اغتشاش گسترش يافته‌اند. به عنوان نمونه دسته‌اي از روش‌ها با فرض معلوم بودن تابع PSF و اعمال معكوس آن بر معادله (۱) مسئله دي‌كانولوشن را به مسئله كاهش اغتشاش (رنگي) تبديل مي‌كنند [۱۵]. البته موضوع معلوم بودن پالس ساتع شده (تابع PSF) در سرتاسر زمان عملاً

[1] Convolution
[2] Blurring
[3] Point Spread Function
[4] White Gaussian noise
[5] Blind deconvolution
[6] Co-primness requirements
[7] Confocal microscope
[8] Slice
[9] Least square error
[10] Misaligned images
[11] Cepstrum
[12] High order spectra

امكان‌پذير نيست، زيرا حتي با داشتن اطلاعات اوليه در مورد پالس، شكل و بسط اين پالس در هنگام نفوذ به بافت تغيير مي‌كند. بر اين اساس استفاده از روش‌هاي ديگر كه در هر گام تخمين PSF را تصحيح كنند، نتايج بهتري به همراه خواهد داشت. به عنوان نمونه مي‌توان از روش‌هاي تكراري استفاده كرد كه در يك گام از تابع PSF و سيگنال تميز تخمين اوليه‌اي ارائه مي‌دهند و در گام بعد با استفاده از روش‌هاي كاهش اغتشاش تخمين‌ها را تصحيح مي‌كنند [۴]. در اين مقاله پس از تخمين اوليه توابع PSF و سيگنال تميز در هر گام، از روش‌هاي نوين كاهش اغتشاش براي بهبود اين تخمين‌ها استفاده مي‌شود.

در بخش ۴ روش كاهش تطبيقي اغتشاش به‌كار رفته در اين مقاله براي تصحيح تخمين PSF توضيح داده مي‌شود. در اين روش [۳، ۴، ۱۶، ۱۷] براي هر پيكسل از يک همسايگي غيرهمسانگرد استفاده شده و سپس عمليات فيلترسازي خطي محلي با روشي همچون فيلتر وينر[۱۳] اعمال مي‌شود. استفاده از پنجره غيرهمسانگرد تطبيقي[۱۴] به انجام نوعي عمليات بخش‌بندي پيش از كاهش اغتشاش منجر شده و بنابراين طي عمليات كاهش اغتشاش، لبه‌ها و بافت تصوير بهتر حفظ خواهد شد. در بخش ۵ الگوريتم مورد استفاده براي بهبود تخمين تصوير تميز ارائه مي‌شود. در اين الگوريتم ابتدا تصوير اوليه به حوزه ويولت مختلط[۱۵] [۱۸] برده شده و در آنجا با استفاده از تخمين زننده بيشينه كننده تابع توزيع پسين[۱۶] (MAP) مبتني بر توزيع لاپلاس[۱۷] با واريانس محلي[۱۸] [۱۹] تصوير بهينه شده و در نهايت عمليات معكوس ويولت انجام مي‌گيرد. در نهايت در بخش ۶ الگوريتم كاهش محوشدگي تصاوير سه بعدي اولتراسوند تشريح مي‌شود. در اين الگوريتم كه مبتني بر مشاهدات چندگانه از يك صحنه است، براي هر فريم از فريم قبل و بعد به عنوان مشاهدات چندگانه از يک تصوير استفاده مي‌شود. در واقع استفاده از تصويرهاي چندگانه مكاني و فركانسي به طور معمول براي حذف محوشدگي تصاوير ثابت كاربرد داشته و براي تصاوير متحرک مي‌توان از تصاوير چندگانه زماني استفاده كرد. اين الگوريتم تكراري شامل دو بخش تشخيص فريم تميز اوليه و تابع محو شدگي (با استفاده از الگوريتم حداقل مربعات خطا كه در بخش ۳ ذكر شده است) و بهبود كيفيت تخمين (با استفاده از الگوريتم‌هاي كاهش اغتشاش مطرح در بخش‌هاي ۴ و ۵) است. نهايتاً در بخش ۷ جمع بندي صورت مي‌گيرد.

۲- معيار مورد استفاده در روش گراديان

همان‌طور كه مشخص است براي حل رابطه ۳ صرفاً $y_i(k)$ معلوم بوده و $x(k)$ و $p_i(k)$ ها بايد تخمين زده شوند. حل اين رابطه در حالت كلي به يک مسئله بدحالت[۱۹] نسبت به $x(k)$ و $p_i(k)$ها منجر مي‌شود. بنابراين در اين حالت از روش‌هاي كمينه‌سازي شرط‌دهي شده[۲۰] استفاده مي‌شود. البته اين شرايط در فرايندهاي دريافت داده طبيعي بسيار رايج بوده و محدوديت خاصي براي حل مسئله ايجاد نمي‌كند. درباره اغتشاش سفيد گوسي $n_i(k)$ براي برآورده شدن معادلات ميانگين و واريانس شروط زير بايد برقرار باشند:

$$\int_{\Omega}(p_i(k)\times x(k)-y_i(k))dk=0 \qquad (۴)$$

$$\int_{\Omega}(p_i(k)\times x(k)-y_i(k))^2\,dk=|\Omega|\sigma_i^2 \qquad (۵)$$

كه در آن Ω ناحيه تعريف شده براي شدت روشنايي پيكسل‌هاي تصوير است.

در صورتي‌كه $Q(x)$ و $R(p_i)$ به ترتيب بيانگر توابع تنظيم[۲۱] $x(k)$ و $pi(k)$ ها باشند، مسئله كمينه‌سازي شرط‌دهي شده به صورت معادله (۶) خواهد بود (مشروط بر آنكه روابط ۳ تا ۵ برقرار باشند):

$$\{x,p_i\}=\arg\min_{x,p_i}[Q(x)+R(p_i)] \qquad (۶)$$

با استفاده از ضرايب لاگرانژ[۲۲] مي‌توان جواب مسئله فوق را با كمينه كردن تابع زير به دست آورد:

$$E(x,p_1,...,p_M)=\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\sigma_i^2}\left\|p_i\times x-y_i\right\|^2 + \gamma_1 Q(x)+\gamma_2 R(p_1,...,p_M) \qquad (۷)$$

كه در آن σ_i^2 واريانس عبارت $p_i\times x-y_i$ است و براي نرماليزه كردن $\left\|p_i\times x-y_i\right\|^2$ بر آن تقسيم شده است. در

[13] Wiener filter
[14] Adaptive anisotropic window
[15] Wavelet-Based Denoising
[16] **M**aximum **A** **P**osteriori
[17] Laplace distribution
[18] Local variance
[19] Ill-posed
[20] Constrained optimization
[21] Regularization functionals
[22] Lagrange multipliers

ساده‌ترين حالت (روش کلاسيک تيخونوف[23] [۲۰، ۲۱]) توابع تنظيم به صورت اندازه‌هاي مربعي همچون روابط زير تعريف مي‌شوند:

$$Q(x)=\int_{\Omega}|x|^2 \qquad (8)$$

$$R(p_1,...,p_M)=\sum_{i=1}^{M}\int_{\Omega}p_i^2 \qquad (9)$$

البته گرچه براي روش‌هاي کلاسيک تيخونوف شامل توابع تنظيم $\int_{\Omega}|x|^2$ و $\int_{\Omega}|\nabla x|^2$ مي‌توان با استفاده از تبديل فوريه به سادگي معادله (۷) را حل نمود، اما اين توابع قادر به انجام عمليات کاهش محوشدگي به شکل مطلوب نبوده و به خصوص لبه‌ها را در حالت اغتشاشي به‌خوبي بازيابي نمي‌کند. بر اين اساس توابع تنظيم متعددي همچون "تغييرات کلي"[24] (TV) [۲۲] به شکل $\int_{\Omega}|\nabla x|$ و مومفارد-شاه[25] [۲۳] که داراي شکل پيچيده‌تري است، براي $Q(x)$ تعريف شده‌اند.

رابطه (۳) را در حالت بدون اغتشاش مي‌توان به شکل ماتريسي رابطه (۱۰) نوشت:

$$Y_i=P_i\times X, \qquad i=1,...,M \qquad (10)$$

همان‌طور که در مقدمه ذکر شد در صورتي که شباهت مناسبي بين کانال‌ها وجود نداشته باشد، حل دقيقي از رابطه فوق در حالت حضور نداشتن اغتشاش به‌دست مي‌آيد. با فرض زير مي‌توان شرط ضعيف عدم شباهت[26] را برقرار دانست [۱]:

فرض ۱. در صورتي که $\tilde{P}_i$ نشان دهنده تبديل Z عبارت P_i باشد، مجموعه $\tilde{P}_i$ براي $i=1,...,m$ داراي شرط عدم شباهت ضعيف خواهند بود اگر و فقط اگر بزرگ‌ترين مقسوم عليه مشترک آنها يک عدد اسکالر باشد. يعني:

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_i(z_1,z_2)=C(z_1,z_2)\tilde{P}_i'(z_1,z_2),\\ &C(z_1,z_2)=a, \qquad i=1,...,M\end{aligned} \qquad (11)$$

به طور مشابه وجود شرط عدم شباهت قوي[27] را مي‌توان مشروط به عدم وجود صفر مشترک دانست. يعني براي هيچ (z_1,z_2) رابطه $\tilde{P}_i(z_1,z_2)=0$ براي $i=1,...,m$ برقرار نباشد.

دو شرط ضعيف و قوي فوق براي چندجمله‌اي‌هاي يک بعدي يکسان‌اند. اما براي چندجمله‌اي‌هاي دوبعدي شرط ضعيف نسبت به شرط قوي کمتر محدودکننده است. در واقع در اين حالت شرط ضعيف براي بسياري از فيلترهاي معين برقرار است. همان‌طور که ذکر شد در عمل شرط قوي براي $M\geq3$ برقرار مي‌شود زيرا ۳ خط (يا بيشتر) با احتمال صفر از يک نقطه مشترک در صفحه (z_1,z_2) عبور مي‌کنند (ولي دو خط با احتمال يک با يکديگر نقطه اشتراک دارند).

در مرجع [۹] نشان داده شده درصورتي که فرض ۱ برقرار باشد، $M\geq2$ بوده و حداقل X داراي يک عنصر غيرصفر باشد جواب‌هاي معادله (۱۲) به صورت P_i (رابطه ۱۳) خواهد بود:

$$Y_i\times G_j - Y_j\times G_i=0, \quad i,j=1,...,M \qquad (12)$$

$$G_i=\begin{cases}P_i\times H, & m_p\geq m_h \,\&\, n_p\geq n_h\\ \alpha P_i, & m_p=m_h \,\&\, n_p=n_h\\ 0, & (m_p<m_h) or (n_p<n_h)\end{cases} \qquad (13)$$

که در آن m_p و m_h به ترتيب تعداد سطرهاي P_i و H و n_p و n_h به ترتيب تعداد ستون‌هاي Pi و H را نشان مي‌دهند. در مسئله مورد نظر ما (که ابعاد مساوي هستند) با حالت اغتشاشي مواجه هستيم و امکان برقراري تساوي در رابطه (۱۰) امکان‌پذير نيست. بنابراين در اين حالت مي‌توان از حل حداقل مربعات خطا براي به‌دست آوردن G_i بهره جست و بر اين اساس مي‌توان از رابطه (۱۴) براي تابع تنظيم R استفاده کرد:

$$R(p_1,...,p_M)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\beta_{ij}\left\|p_i\times y_j - p_j\times y_i\right\|^2 \qquad (14)$$

پارامتر β_{ij} (مشابه پارامتر $1/\sigma_j^2$ در رابطه ۷) براي نرماليزه کردن به‌کار مي‌رود. بدين منظور کافيست واريانس عبارت $p_i\times y_j - p_j\times y_i$ را به‌دست آورد و β_{ij} را برابر معکوس اين واريانس قرار داد. با توجه به رابطه (۳) خواهيم داشت:

$$p_i\times y_j - p_j\times y_i = n_i\times y_j - n_j\times y_i \qquad (15)$$

از آنجا که n_i و n_j اغتشاش سفيد گوسي هستند، رابطه فوق که ترکيبي خطي از فرايند سفيد گوسي است خود فرايندي سفيد و گوسي خواهد بود و واريانس آن را مي‌توان مطابق معادله (۱۶) به‌دست آورد:

[23] Tichonov
[24] Total variation
[25] Mumford-Shah
[26] Weakly (factor) co-prime
[27] Strong (zero) co-prime

$$
\begin{aligned}
E[(n_i * y_j - n_j * y_i)^2] =& \\
& E[(\sum_t n_i(t) y_j(k-t))^2] + E[(\sum_t n_j(t) y_i(k-t))^2] \\
& -2E[\sum_t n_i(t) y_j(k-t) \sum_t n_j(t) y_i(k-t)] \\
& = \sum_t \sum_{t'} [E[n_i(t) n_i(t')]] y_j(k-t) y_j(k-t')] \\
& + \sum_t \sum_{t'} [E[n_j(t) n_j(t')]] y_i(k-t) y_i(k-t')] \\
& -2 \sum_t \sum_{t'} E[n_i(t) n_j(t')]] y_j(k-t) y_i(k-t')]
\end{aligned} \qquad (۱۶)
$$

باتوجه به مواجهه با اغتشاش سفيد گوسي خواهيم داشت:

$$E[n_i(t) n_j(t')] = \sigma_i^2 \delta(i-j) \delta(t-t') \qquad (۱۷)$$

با جايگذاري معادله (۱۷) در روابط نهايي (۱۶) خواهيم داشت:

$$
\begin{aligned}
E[(n_i * y_j - n_j * y_i)^2] =& \\
& \sigma_i^2 \sum_k y_j^2(k) + \sigma_j^2 \sum_k y_i^2(k)
\end{aligned} \qquad (۱۸)
$$

رابطه (۱۸) را با استفاده از قانون پارسوال[28] مي‌توان به صورت معادله (۱۹) بازنويسي كرد:

$$
\begin{aligned}
& E[(n_i * y_j - n_j * y_i)^2] = \\
& \sigma_i^2 \frac{1}{|K|} \sum_f \hat{y}_j^2(f) + \sigma_j^2 \frac{1}{|K|} \sum_f \hat{y}_i^2(f)
\end{aligned} \qquad (۱۹)
$$

كه در آن علامت ^ بيانگر عملگر تبديل فوريه و |K| نشان دهنده اندازه تصوير است.

بر اين اساس با انتخاب β_{ij} برابر با معكوس رابطه (۱۹)، رابطه (۱۴) را مي‌توان در قالب رابطه (۲۰) بازنويسي كرد:

$$
\begin{aligned}
& R(p_1, \dots, p_M) = \\
& \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \frac{|K| \left\| p_i \times y_j - p_j \times y_i \right\|^2}{\sigma_i^2 \sum_f \hat{y}_j^2(f) + \sigma_j^2 \sum_f \hat{y}_i^2(f)}
\end{aligned} \qquad (۲۰)
$$

با استفاده از مطالب ذكر شده در اين بخش تابع معيار (۷) را مي‌توان با استفاده از فرم گسسته توابع (۸) و (۹) و رابطه (۲۰) به صورت رابطه (۲۱) بازنويسي نمود:

$$
\begin{aligned}
& E(x, p_1, \dots, p_M) \\
& = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{\sigma_i^2} \left\| p_i \times x - y_i \right\|^2 + \gamma_1 \left\| x \right\|^2 + \gamma_2 \sum_{i=1}^{M} \left\| p_i \right\|^2 \\
& + \gamma_3 \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \frac{|K| \left\| p_i \times y_j - p_j \times y_i \right\|^2}{\sigma_i^2 \sum_f \hat{y}_j^2(f) + \sigma_j^2 \sum_f \hat{y}_i^2(f)}
\end{aligned} \qquad (۲۱)
$$

اندازه‌هاي در نظر گرفته شده در رابطه فوق را با استفاده از قانون پارسوال مي‌توان به صورت معادلات (۲۲) تا (۲۵) در حوزه فركانس بازنويسي كرد:

$$\left\| p_i \times x - y_i \right\|^2 = \frac{1}{|K|} \sum_f |\hat{p}_i(f) \hat{x}(f) - \hat{y}_i(f)|^2 \qquad (۲۲)$$

$$\left\| x \right\|^2 = \frac{1}{|K|} \sum_f |\hat{x}(f)|^2 \qquad (۲۳)$$

$$\left\| p_i \right\|^2 = \frac{1}{|K|} \sum_f |\hat{p}_i(f)|^2 \qquad (۲۴)$$

$$
\begin{aligned}
& \left\| p_i \times y_j - p_j \times y_i \right\|^2 = \\
& \frac{1}{|K|} \sum_f |\hat{p}_i(f) \hat{y}_j(f) - \hat{p}_j(f) \hat{y}_i(f)|^2
\end{aligned} \qquad (۲۵)
$$

و در نهايت تابع معيار (۷) به صورت رابطه (۲۶) به دست خواهد آمد:

$$
\begin{aligned}
E =& \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_f |\hat{p}_i(f) \hat{x}(f) - \hat{y}_i(f)|^2 \\
& + \gamma_1 \sum_f |\hat{x}(f)|^2 + \gamma_2 \sum_{i=1}^{M} \sum_f |\hat{p}_i(f)|^2 + \\
& \gamma_3 \sum_{i,j=1}^{M} \frac{\sum_f |\hat{p}_i(f) \hat{y}_j(f) - \hat{p}_j(f) \hat{y}_i(f)|^2}{\frac{\sigma_i^2}{|K|} \sum_f \hat{y}_j^2(f) + \frac{\sigma_j^2}{|K|} \sum_f \hat{y}_i^2(f)}
\end{aligned} \qquad (۲۶)
$$

در بخش بعدي با كمينه كردن تابع فوق با استفاده از روش گراديان، تخمين‌هاي اوليه x و p_i به‌دست خواهند آمد.

۳- استفاده از روش گراديان براي تخمين تصـوير تميز و تابع محوشدگي

براي به دست آوردن x و p_i در رابطه (۳) با استفاده از روش گراديان، كافيست مشتق رابطه (۲۶) نسبت به اين توابع برابر صفر قرار داده شود. با فرض ثابت بودن پارامتر β_{ij} و براي يک فركانس خاص q خواهيم داشت:

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{x}^*(q)} = \gamma_1 \hat{x}(q) + \sum_{i=1}^{M} \frac{\hat{p}_i^*(q)}{\sigma_i^2} (\hat{p}_i(q) \hat{x}(q) - \hat{y}_i(q)) \qquad (۲۷)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial \hat{p}_i^*(q)} =& \frac{\hat{x} \times (q)}{\sigma_i^2} (\hat{p}_i(q) \hat{x}(q) - \hat{y}_i(q)) + \gamma_2 \hat{p}_i(q) \\
& + \gamma_3 \sum_{j=1, j \neq i}^{M} \beta_{ij} (\hat{p}_i(q) \hat{y}_j(q) - \hat{p}_j(q) \hat{y}_i(q)) \hat{y}_j^*(q)
\end{aligned} \qquad (۲۸)
$$

بنابراين براي ناحيه سطح روشنايي $\Pi_x = \{x; 0 \le x < 1\}$ و

$$
\begin{aligned}
\Pi_{p_i} = \{p_i; p_i(k) \ge 0, & \sum_{k=(k_1,k_2)} p_i(k) = 1, \\
& p_i(k) = 0 \quad if \quad |k_1| > \rho, |k_2| > \rho\}
\end{aligned}
$$

(شرايط ذكر شده براي Π_{p_i} به مثبت و نرماليزه شدن PSF منجر مي‌شود؛ ρ عددي مثبت است كه شعاع ناحيه تحت پوشش PSF را مشخص مي‌كند) خواهيم داشت:

$$\{p_i, x\} = \arg \min_{p_i \in \Pi_{p_i}, x \in \Pi_x} [E] \qquad (۲۹)$$

و براي حل رابطه (۲۹) با استفاده از روش بازگشتي گراديان

[28] Parseval's theorm

روابط (۳۰) و (۳۱) به دست مي‌آيد:

$$\hat{x}^{(j)} = \hat{x}^{(j-1)} - a_j \frac{\partial E}{\partial \hat{x}^*}\bigg|_{\hat{x}=\hat{x}^{(j-1)},\,\hat{p}_i=\hat{p}_i^{(j-1)}} \qquad (۳۰)$$

$$\hat{p}_i^{(j)} = \hat{p}_i^{(j-1)} - b_j \frac{\partial E}{\partial \hat{p}_i^*}\bigg|_{\hat{x}=\hat{x}^{(j)},\,\hat{p}_i=\hat{p}_i^{(j-1)}} \qquad (۳۱)$$

كه در آن j نشان دهنده انديس تكرار و a_j و b_j گام‌هاي تكرار الگوريتم هستند كه براي تضمين همگرايي بايد به اندازه كافي كوچك انتخاب شوند.

به منظور بهبود همگرايي الگوريتم (روابط تكراري ۳۰ و ۳۱) مي‌توان از روش نيوتن [۲۴] استفاده نمود. بدين منظور كافيست ماتريس هسين[۲۹] معادل را محاسبه كرد و گام‌هاي تكرار را متناسب با معكوس عنصر قطري متناظر اصلاح نمود. بر اين اساس با مشتق جزئي گرفتن مجدد از روابط (۲۷) و (۲۸) به سادگي عناصر قطري به دست مي‌آيد:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial\hat{x}(q)\partial\hat{x}^*(q)} = \gamma_1 + \sum_{i=1}^{M} \frac{|\hat{p}_i(q)|^2}{\sigma_i^2} \qquad (۳۲)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial\hat{p}_i(q)\partial\hat{p}_i^*(q)} = \frac{|\hat{x}(q)|^2}{\sigma_i^2} + \gamma_2 + \gamma_3 \sum_{j=1,j\neq i}^{M} \beta_{ij}|\hat{y}_j(q)|^2 \qquad (۳۳)$$

در روابط (۳۰) و (۳۱)، a_j و b_j به ترتيب به مقادير فوق تقسيم مي‌شوند، بنابراين در نهايت خواهيم داشت:

$$\hat{x}^{(j)} = (1-a_j)\hat{x}^{(j-1)} + a_j \frac{\sum_{i=1}^{M} \hat{y}_i \hat{p}_i^{*(j-1)}}{\gamma_1\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{M} |\hat{p}_i^{(j-1)}|^2} \qquad (۳۴)$$

$$\hat{p}_i^{(j)} = (1-b_j)\hat{p}_i^{(j-1)} + b_j \frac{\hat{y}_i \frac{\hat{x}^{*(j-1)}}{\sigma_i^2} + \gamma_3 \hat{y}_i \sum_{t=1,t\neq i}^{M} \beta_{it}^{(j-1)} \hat{p}_t^{(j-1)} \hat{y}_t^*}{\frac{|\hat{x}^{(j)}|^2}{\sigma_i^2} + \gamma_2 + \gamma_3 \sum_{t=1,t\neq i}^{M} \beta_{it}^{(j-1)} |\hat{y}_t|^2} \qquad (۳۵)$$

كه در آن $\beta_{it}^{(j-1)}$ معكوس رابطه (۱۹) به ازاي $\hat{p}_t = \hat{p}_t^{(j-1)}$ است.

در پايان جواب‌هاي به‌دست آمده در حوزه فركانس با توجه به نواحي تعريف شده در حوزه مكان (با استفاده از معكوس تبديل فوريه) Π_x و Π_{p_i} به صورت روابط (۳۶) و (۳۷) تصوير مي‌شوند:

$$P_{\Pi_x}\{x\} = \max[0, \min[1, x]] \qquad (۳۶)$$

$$P_{\Pi_{p_i}}\{p_i\} = p_i / \sum_k p_i(k), \quad p_i > 0 \qquad (۳۷)$$
$$p_i(k) = 0 \quad if \quad |k_1| > \rho, |k_2| > \rho\}$$

معمولاً PSFها در حوزه فركانس به صورت نرماليزه فرض مي‌شوند كه براي اين كار كافيست $\hat{p}_i^{(j)}$ را با $\hat{p}_i^{(j)}/\hat{p}_i^{(j)}(0)$ جايگزين نمود كه در آن $\hat{p}_i^{(j)}(0) = \sum_k p_i^j(k)$.

۴- كاهش اغتشاش بـا اسـتفاده از روش تطبيقـي غيرهمسانگرد

در مراجع [۱۶، ۱۷] روشي جديد براي كاهش اغتشاش ارائه شده است كه در آن براي هر پيكسل پنجره‌اي غيرهمسانگرد در اطرافش در نظر گرفته شده و با استفاده از پيكسل‌هاي داخل پنجره عمليات كاهش اغتشاش براي آن پيكسل اجرا مي‌شود. در مقايسه با روش‌هاي مبتني بر پنجره همسانگرد [۱۹]، اين روش قادر به نوعي بخش‌بندي تصوير قبل از عمليات كاهش اغتشاش بوده كه در بهبود اين عمليات نقش اساسي ايفا مي‌كند. بدين منظور از فيلترهاي خطي جهت‌دار $g_{h,\theta}$ استفاده مي‌شود كه از روش LPA[۳۰] [۱۶، ۱۷] به‌دست مي‌آيند. θ زاويه فيلتر را نشان مي‌دهد كه متعلق به مجموعه قابل شمارش $\{\theta_1,...,\theta_L\}$ است (به عنوان نمونه براي L=۸ مجموعه برابر {۰، ۴۵، ۹۰، ۱۳۵، ۱۸۰، ۲۲۵، ۲۷۰، ۳۱۵} درجه است). براي هر زاويه θ_t طول پنجره انتخابي مي‌تواند از مجموعه قابل شمارش و صعودي $\{h_1,...,h_J\}$ انتخاب شود و بر اين اساس مي‌توان تخمين‌هاي زير را شكل داد:

$$x_{h,\theta}^{est}(k) = g_{h,\theta}(k) * y_i(k) \qquad (۳۸)$$

كه در حوزه فركانس به شكل رابطه (۳۹) خواهد بود:

$$\hat{x}_{h,\theta}^{est}(f) = \hat{g}_{h,\theta}(f)\hat{y}_i(f) \qquad (۳۹)$$

براي هر زاويه θ_t بهترين مقدار h با استفاده از قانون غيرخطي ICI[۳۱] [۱۶، ۱۷] انتخاب مي‌شود. در واقع بهترين h كه آن را با h^+ نشان مي‌دهيم تابعي از انديس مكاني k و θ_t است. بدين منظور براي هر θ_t مقدار h^+ برابر است با بزرگ‌ترين مقدار h از مجموعه $h_1 < h_2 < ... < h_J$ كه تخمين به دست آمده از آن با تخمين‌هاي به دست آمده از مقادير كوچك‌تر h تفاوت قابل توجهي نداشته باشد (شايان ذكر است انتخاب h بزرگ‌تر به توليد فيلتري پايين‌گذر با پهناي

[29] Hessian
[30] **L**ocal **P**olynomial **A**pproximation
[31] **I**ntersection of **C**onfidence **I**ntervals

باند كوچك‌تر منجر مي‌شود و بنابراين فقط فركانس‌هاي پايين در خروجي فيلتر مشاهده مي‌شوند).

براي به‌دست آوردن $h^{+}(k,\theta_t)$ مجموعه‌اي از بازه‌هاي اطمينان مطابق رابطه (۴۰) تعريف مي‌شوند:

$$C_s = [x^{est}_{h_s,\theta}(k) - R\sigma_{x^{est}_{h_s,\theta}}, x^{est}_{h_s,\theta}(k) + R\sigma_{x^{est}_{h_s,\theta}}] \qquad (۴۰)$$

كه در آن R پارامتري براي كنترل ميزان نرمي تصوير است (مقادير بزرگ آن به نرمي و مقادير كوچك آن به زبري تصوير منجر مي‌شود). $\sigma_{x^{est}_{h_s,\theta}}$ نيز نشان‌دهنده واريانس $x^{est}_{h_s,\theta}$ است كه مي‌توان آن را با توجه به رابطه (۳۸) در قالب رابطه (۴۱) محاسبه كرد:

$$\sigma^2_{x^{est}_{h_s,\theta}} = \int P_{x^{est}_{h_s,\theta}}(f) = \int P_{y_i}(f) | \hat{g}_{h,\theta}(f) |^2 \qquad (۴۱)$$

كه در آن $P_{(.)}$ نشان‌دهنده عملگر طيف توان است. مطابق رابطه (۱) مي‌توان $P_{y_i}(f)$ را بر اساس اغتشاش سفيد گوسي به صورت σ_i^2 در نظر گرفت. بر اين اساس خواهيم داشت:

$$\sigma^2_{x^{est}_{h_s,\theta}} = \sigma_i^2 \int | \hat{g}_{h,\theta}(f) |^2 = \sigma_i^2 \sum_k g^2_{h,\theta}(k) \qquad (۴۲)$$

براي تخمين σ_i^2 نيز از فيلتر ميانه مطابق رابطه (۴۳) استفاده مي‌شود [۲۵]:

$$\sigma_i^2 = median\{\frac{| y_i^s - y_i^{s+1} |}{0.6745\sqrt{2}}\}, s = 1,...,| K | -1 \qquad (۴۳)$$

كه در آن y_i^s نشان‌دهنده مؤلفه‌هاي ستونگرد ماتريس مشاهدات $y_i(k)$ است.

مطابق قانون ICI مقدار Ds به وسيله رابطه (۴۴) تعريف مي‌شود:

$$D_s = \bigcap_{i=1}^{s} C_i \qquad (۴۴)$$

بزرگ‌ترين مقدار s را كه مطابق رابطه فوق مقدار غيرتهي ايجاد مي‌كند s^+ ناميده و در اين صورت $h^{+}(k,\theta_t) = h_{s+}$ خواهد بود.

۵- كاهش اغتشاش در حوزه ويولت مختلط با استفاده از تخمين زننده بيشينه كننده تابع توزيع پسين[۳۲] و تابع چگالي احتمال لاپلاس[۳۳]

در سال‌هاي اخير كاهش اغتشاش در حوزه ويولت مورد توجه قرار گرفته است [۲۵-۲۸] اين موضوع به دليل آن است كه ضرايب ويولت از ويژگي‌هاي آماري ممتازي همچون خاصيت تُنُك بودن[۳۴] برخوردارند و اين موضوع نشان مي‌دهد كه خصوصيات اصلي سيگنال را مي‌توان در چندين ضريب بزرگ خلاصه كرد و باقيمانده ضرايب كوچك حاوي اطلاعات كم‌اهميت سيگنال و اغتشاش هستند. بر اين اساس مي‌توان با استفاده از عملگرهاي سطح آستانه[۳۵] مناسب، سيگنال مطلوب را از اغتشاش جدا كرد.

در عمليات كاهش اغتشاش در حوزه ويولت، تابع سطح آستانه به‌كار گرفته شده و نوع ويولت نقش اساسي دارند. استفاده از ويولت مختلط به‌جاي ويولت معمولي به علت خاصيت تغييرناپذيري نسبت به شيفت و ايجاد فيلترهاي جهت‌دار در زواياي مختلف حين پردازش به توليد آرتيفكت بصري كمتري نسبت به ويولت معمولي منجر مي‌شود. به عنوان نمونه تبديل ويولت معمولي زيرتصويرهاي حاصل از زواياي قطري مثبت و منفي را با يكديگر مخلوط كرده و به ايجاد آرتيفكت صفحه شطرنجي در تصوير بازيابي شده منجر مي‌شود. حذف اين آرتيفكت به‌ويژه براي پردازش تصاوير پزشكي كه هر جزئياتي در تصوير مي‌تواند به تعبير غلط منجر شود؛ بسيار مهم است. بنابراين در اين مقاله از تبديل ويولت مختلط (با وجود ايجاد افزونگي) استفاده شده است.

در سال‌هاي اخير استفاده از تئوري بيز[۳۶] براي به دست آوردن تخمين زننده مناسب (تابع سطح آستانه) در حوزه ويولت مورد توجه قرار گرفته است [۲۵-۲۸]. در واقع دسته روش‌هاي مختلفي مي‌توان براي به‌دست آوردن تابع سطح آستانه در نظر گرفت كه مطابق تحقيقات صورت گرفته يكي از شيوه‌هاي مطلوب بر اساس تئوري بيز، روش تخمين‌زننده بيشينه‌كننده تابع توزيع پسين است. بنابراين براي مشاهدات

[32] Maximum a posteriori
[33] Laplace probability density function
[34] Sparseness property
[35] Thresholding (shrinkage) function
[36] Bayes theorem

اغتشاشي $z(k)=x(k)+n(k)$ كه $n(k)$ بيانگر اغتشاش سفيد گوسي و $x(k)$ سيگنال تميز در مؤلفه kام باشد، ضرايب اغتشاشي ويولت نيز داراي شكل $y(k)=w(k)+n(k)$ خواهند بود كه $n(k)$ اغتشاش سفيد گوسي و $w(k)$ ضرايب اغتشاشي تميز است و با بيشينه كردن تابع توزيع پسين خواهيم داشت:

$$w_{MAP}^{est}(y(k)) = \arg\max_{w(k)} p_{w(k)|y(k)}(w(k) \mid y(k)) \qquad (۴۵)$$

بنابراين با استفاده از قانون بيز و پس از اعمال ساده‌سازي خواهيم داشت [۱۹]:

$$\hat{w}_{MAP}^{est}(y(k)) = \arg\max_{w(k)} [p_n(y(k)-w(k)).p_{w(k)}(w(k))] \qquad (۴۶)$$

با تعريف $f(w(k)) = \log(p_{w(k)}(w(k)))$ و اغتشاش گوسي با تابع توزيع $p_n(n) = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}.\exp(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2})$ (و با استفاده از عملگر مشتق) خواهيم داشت:

$$\frac{y(k)-\hat{w}(k)}{\sigma_n^2} + f'(\hat{w}) = 0 \qquad (۴۷)$$

همان‌طور كه مشخص است براي حل رابطه فوق بايد $p_{w(k)}(w(k))$ معلوم باشد. در مرجع [۱۹] نشان داده شده است كه با استفاده از توزيع لاپلاس با واريانس محلي (به شكل $p_w(w(k)) = \frac{1}{\sigma(k)\sqrt{2}}\exp(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma(k)}|w(k)|)$) مي‌توان مهمترين خصوصيات آماري ضرايب ويولت شامل تُنُك بودن و همبستگي درون مقياسي[۳۷] را مدل كرد. با اين فرض و پس از جايگذاري توابع f, f' به ترتيب به صورت $-\log(\sigma\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}.|w|$ و $-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}.sign(w)$ مي‌توان نوشت:

$$y(k) = \hat{w}(y(k)) + \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma(k)}.sign(\hat{w}(y(k))) \qquad (۴۸)$$

بنابراين عملگر محلي سطح آستانه از رابطه (۴۹) به دست مي‌آيد:

$$\hat{w}(y(k)) := soft(y(k), \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma(k)}) = sign(y(k)).(|y(k)| - \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma(k)})_+ \qquad (۴۹)$$

كه در آن $(a)_+ = \begin{cases} 0 & if \quad a<0 \\ a & otherwise \end{cases}$ است. شكل ۱ نمودار بلوكي كلي روش كاهش اغتشاش مطرح شده در اين بخش را نشان مي‌دهد كه در بخش بعد توضيح داده خواهد شد براي بهبود تخمين تصوير تميز $x(k)$ به‌كار مي‌رود. در اين روش مطابق روش مطرح شده در مرجع [۱۹] واريانس محلي از طريق رابطه (۵۰) تخمين زده مي‌شود:

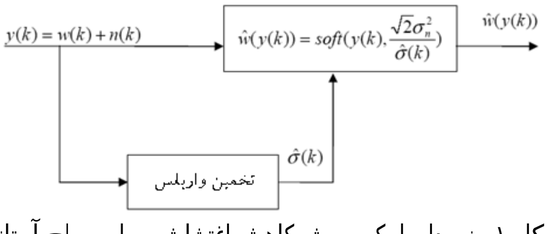
$$\hat{\sigma}(k) = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{j\in N(k)} y^2(j) - \sigma_n^2} \qquad (۵۰)$$

كه در آن M اندازه پنجره $N(k)$ است كه حول هر نقطه k در نظر گرفته مي‌شود. به طور مشابه براي تخمين واريانس اغتشاش نيز مي‌توان مشابه رابطه (۴۳) از فيلتر ميانه در نرم‌ترين زيرباند استفاده كرد:

$$\sigma_n^2 = \frac{median(|y_i|)}{0.6745}, \quad y_i \in last \quad subband \quad in \quad finest \quad scale \qquad (۵۱)$$

۶- ارائه الگوريتم و نتايج شبيه‌سازي

در اين بخش با توجه به مباحث طرح شده در سه بخش قبلي الگوريتم مورد استفاده براي كاهش محوشدگي تصاوير اولتراسوند ارائه مي‌شود و از آن براي تصاوير واقعي ويدئويي استفاده مي‌گردد. در اين الگوريتم براي هر فريم از فريم‌هاي قبل و بعد آن به عنوان نمايش‌هاي چندگانه از يك صحنه استفاده مي‌شود و با استفاده از روش بازگشتي مطرح شده در بخش ۳ تخمين‌هاي اوليه‌اي از فريم تميز و توابع محوشدگي به‌دست مي‌آيد. پس از آن با استفاده از روش مطرح در بخش ۴ تخمين تابع محوشدگي ($p(k)$ در رابطه ۳) و با استفاده از روش مطرح شده در بخش ۵ تخمين تصوير تميز ($x(k)$ در رابطه ۳) بهبود مي‌يابند. اين الگوريتم در جدول ۱ جمع‌بندي شده است.



شكل ۱- نمودار بلوكي روش كاهش اغتشاش محلي سطح آستانه نرم شده در حوزه ويولت مختلط [۱۹]

[37] intrascale dependency

جدول ۱- الگوريتم حذف محوشدگي دنباله مشاهدات

۱- انتخاب فريم مورد نظر	براي هر فريم n_1 فريم قبل و n_2 فريم بعد را به عنوان مشاهدات چندگانه در نظر مي‌گيريم. $M= n_1+ n_2+1$
۲- شروع	از تابع گوسي يا تابع صفر به عنوان تخمين اوليه توابع محو شدگي ($p_i^{(0)}$ ها) استفاده مي‌شود و تخمين اوليه x به صورت $x^{(0)} = \sum_{i=1}^{M} y_i(k)/M$ انتخاب مي‌شود. j=1
۳- تخمين تصوير	$\hat{x}^{(j)}$ مطابق رابطه (۳۴) محاسبه مي‌شود.
۴- فيلتر كردن تصوير	با استفاده از الگوريتم محلي سطح آستانه نرم مطرح شده در بخش۵ عمليات اعمال فيلتر انجام مي‌شود تا تخمين اوليه تصوير بهبود يابد. بدين منظور به واريانس اغتشاش موجود در $x^{(j)}$ (فوريه معكوس گام قبل) و واريانس تصوير در حوزه ويولت نياز است كه با استفاده از رابطه (۵۰) و (۵۱) به‌دست مي‌آيد.
۵- عمليات تصوير	با استفاده از رابطه (۳۶) عمليات تصوير بر روي داده‌هاي گام قبل اعمال مي‌شود.
۶- تخمين PSF	$\hat{p}_i^{(j)}$ ها مطابق رابطه (۳۵) محاسبه مي‌شوند. براي سرعت بخشيدن به الگوريتم مي‌توان اين گام را چندين بار تكرار كرد تا به تخمين بهتري دست يافت ($\hat{p}_i^{(j)} \leftarrow \hat{p}_i^{(j-1)}$).
۷- عمليات تصوير براي PSF	با استفاده از رابطه (۳۷) عمليات تصوير بر روي داده‌هاي گام قبل اعمال مي‌شود.
۸- اعمال فيلتر PSF	با استفاده از الگوريتم LPA-ICI مطرح شده در بخش۴ عمليات اعمال فيلتر انجام مي‌شود تا PSF تخمين زده شده بهبود يابد. بدين منظور به واريانس اغتشاش موجود در $p_i^{(j)}$ (فوريه معكوس دو گام قبل) نياز است كه با استفاده از روابط (۴۲) و (۴۳) (براي $p_i^{(j)}$ به‌جاي y_i) به دست مي‌آيد.
۹- تكرار الگوريتم	$j \leftarrow j+1$ و به گام ۲ رفته و الگوريتم را به تعداد لازم (J مرحله) تكرار مي‌كنيم.
۱۰- فريم بعد	گام‌هاي قبل را براي فريم بعدي تكرار مي‌كنيم.

۶-۱- مقداردهي اوليه الگوريتم

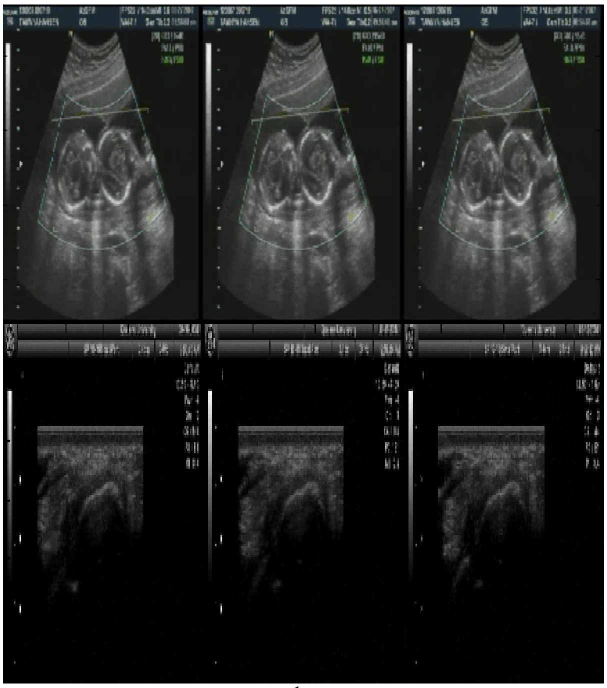
در اين مقاله n_1 و n_2 برابر يك انتخاب شده است. براي اجراي الگوريتم LPA-ICI به منظور بهبود تخمين PSF از مجموعه $H = \{(1,1),(2,2),(3,3),(5,5),(7,7),(11,11)\}$ استفاده شده است. همچنين از توابع LPA مرتبه صفر با پنجره يكنواخت براي $g_{h,\theta}$ استفاده مي‌شود (بر اين اساس براي هر نقطه ميانگين مشاهدات در پنجره درنظر گرفته شده محاسبه مي‌شود). زواياي θ در نظر گرفته شده نيز شامل ۴ جهت اصلي صفر، ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ درجه‌اند. براي اجراي الگوريتم كاهش اغتشاش در حوزه ويولت نيز از ويولت مختلط پيشنهادي در مرجع [۲۹] در سه گام استفاده شده و نتايج شبيه‌سازي‌ها نشان مي‌دهد كوچك‌ترين اندازه براي پنجره محلي به بهترين نتايج منجر مي‌شود. با انتخاب R=۱/۵ و گام‌هاي تكرار a_j=۰/۶، b_j=۰/۹ و پس از J=۲۰ تكرار (در گام ۶ نيز ۷ تكرار انجام مي‌گيرد) به‌طور معمول نتايج مناسبي حاصل مي‌شود. چنان كه انتظار مي‌رود γ_3 نسبت به ديگر ضرايب بيشترين اهميت را دارد و بنابراين γ_1 و γ_2 روي مقداري بسيار كوچك (10^{-6}) و γ_3 روي ۱/۲ تنظيم مي‌شود.

۶-۲- پايگاه داده تصاوير مورد استفاده

پايگاه داده[38] مورد استفاده در اين الگوريتم شامل ۲۵۶ فريم از يک دنباله ۳۲۰×۲۴۰ سونوگرافي است. براي همگرايي بهتر الگوريتم روي قسمت مركزي اين داده‌ها تمركز شده و هر نمونه مورد پردازش داراي اندازه ۱۲۸×۲۵۶ خواهد بود. تصاوير اين دنباله محوشدگي داشتند و در قسمت‌هايي از اين بخش كه ارزيابي از طريق ايجاد محوشدگي مصنوعي مورد نظر باشد، تصوير مورد نظر از همين پايگاه با توابع محوشدگي مورد استفاده دچار خرابي مجدد (محوشدگي + اغتشاش) خواهد شد. علاوه بر پايگاه فوق كه براي تصاوير طبيعي و مصنوعي مورد استفاده قرار مي‌گيرد، دنباله حاصل از اخذ تصاوير اولتراسوند از مچ دست نيز كه داراي بيش از ۲۰۰۰ فريم است براي ارزيابي تصاوير واقعي مورد استفاده قرار مي‌گيرد. بدين منظور از قسمت مركزي اين داده‌ها با اندازه ۱۲۸×۲۵۶ و تعداد ۵۱۲ فريم استفاده مي‌شود.

شكل ۲، فريم‌هاي ۱۰۰، ۱۰۱ و ۱۰۲ از داده‌هاي سونوگرافي و فريم‌هاي ۳۹، ۴۰ و ۴۱ دنباله مربوط به تصاوير اخذ شده از مچ دست را نمايش مي‌دهد.

[38] Database



شکل ۲- نمونه‌اي از تصاوير پايگاه مورد استفاده در اين مقاله: رديف اول به ترتيب از چپ به راست فريم‌هاي ۱۰۰، ۱۰۱ و ۱۰۲ از داده‌هاي سونوگرافي و رديف دوم به ترتيب از چپ به راست فريم‌هاي ۳۹، ۴۰ و ۴۱ دنباله مربوط به تصاوير اولتراسوند اخذ شده از مچ دست را نمايش مي‌دهد.

۳-۶- اعمال الگوريتم بر روي تصاوير مصنوعي

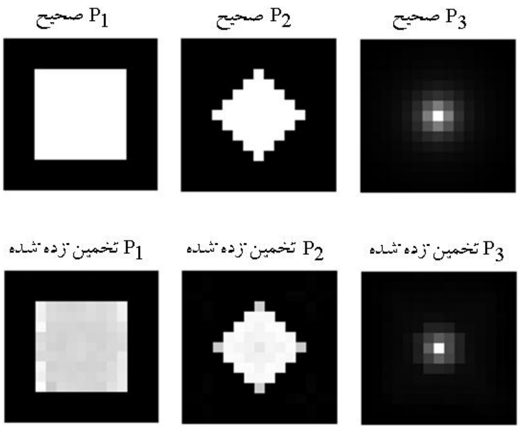
براي ارزيابي کمي الگوريتم ارائه شده، يکي از تصاوير پايگاه اشاره شده با توابع PSF زير دچار محوشدگي مي‌شود (رديف اول شکل ۳):

- PSF يکنواخت مربعي با اندازه ۹×۹
- PSF يکنواخت با اندازه ۷×۷ که به اندازه °۴۵ چرخانده شده
- PSF به فرم تابع درجه ۲ معکوس $1/(1+x_1^2+x_2^2)$

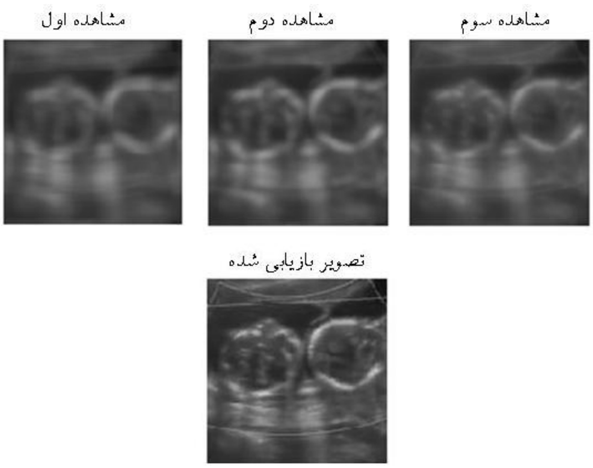
معمولاً براي بررسي اثر اغتشاش در تصاوير دچار محوشدگي از معيار سيگنال به اغتشاش[39] (BSNR) تعريف شده در قالب رابطه (۵۲) استفاده مي‌شود:

$$BSNR = 10\log\left[\frac{\sum_k (p_i(k)*x(k)-\sum_k p_i(k)*x(k))^2}{|K|\,\sigma_j^2}\right] \quad (52)$$

که |K| بيانگر اندازه تصوير و σ_j انحراف معيار اغتشاش در کانال زام هستند. همان‌طور که مشخص است رابطه فوق بيانگر تفاوت واريانس اغتشاش، با داده بدون اغتشاش برحسب دسيبل (dB) است. در اين بخش هر يک از تصاوير محوشده به اغتشاش گوسي با ميزان BSNR برابر ۴۰dB آغشته شده است. تصاوير نهايي که به صورت مصنوعي دچار محوشدگي و اغتشاش شده‌اند در رديف اول شکل ۴ نشان داده شده‌اند. رديف دوم شکل ۴، نتيجه اعمال الگوريتم ذکر شده در اين مقاله بر روي نمونه تصوير اولتراسوند (با ابعاد ۲۵۶×۱۲۸) است که سه مشاهده از آن مطابق رديف اول شکل موجود بوده است. شايان توجه است در اين شبيه‌سازي هر سه مشاهده دقيقاً مربوط به يک صحنه هستند ولي آنچه در عمل مورد استفاده قرار مي‌گيرد فريم‌هاي قبل و بعد از فريم مورد نظر به عنوان تقريبي از مشاهدات چندگانه است.



شکل ۳- توابع PSF به کار رفته (رديف اول) و تخمين زده شده (رديف دوم) در شکل ۴



شکل۴- نمونه‌اي از عمليات کاهش محوشدگي براي تصاوير مصنوعي

[39] Blurred Signal-to-Noise Ratio

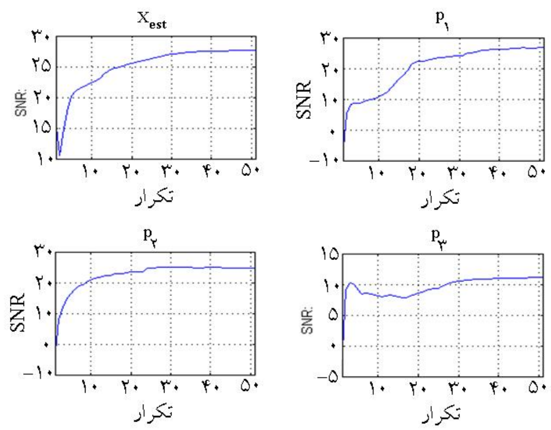
شكل ۹ نيز نمودار بهبود سيگنال به اغتشاش در هر تكرار براي تخمين‌هاي مختلف را نشان مي‌دهد. بدين منظور اگر $x^{est}(k)$ بيانگر تصوير تخمين زده شده به وسيله الگوريتم باشد، از معيار SNR مطابق با رابطه (۵۳) استفاده شده است:

$$SNR = 10\log[\frac{\sum_k x^2(k)}{\sum_k (x(k)-x^{est}(k))^2}] \qquad (۵۳)$$

در جدول ۲ نيز ميزان بيشينه سيگنال به اغتشاش خروجي[۴۰] (PSNR) براي مقادير مختلف اغتشاش نمايش داده شده است. اين مقدار از رابطه (۵۴) محاسبه مي‌شود:

$$SNR = 10\log[255^2 / \sum_k (x(k)-x^{est}(k))^2] \qquad (۵۴)$$

در اين جدول مقادير PSNR به دست با الگوريتم اين مقاله با مقادير متناظر در روش هاي مبتني بر بيشينه كردن تابع درست‌نمايي[۴۲] (ML) [۳۰-۳۲] داراي كاربرد متداول مقايسه شده است. روش‌هاي مذكور وابستگي زيادي به مقدار اوليه انتخاب شده براي تابع PSF داشته كه در اينجا از تابع گوسي با اندازه ۱۵×۱۵ و واريانس ۱۰ استفاده شده است (كه به طور معمول داراي جواب مطلوبي است).



شكل ۵- نمودار بهبود سيگنال به اغتشاش در هر تكرار

جدول ۲- بيشينه سيگنال به اغتشاش خروجي الگوريتم بر حسب دسيبل براي مقادير مختلف اغتشاش در شكل ۴

PSNR a_j=۰/۳ ، b_j=۰/۵، J=۵۰	PSNR a_j=۰/۶ ، b_j=۰/۹، J=۲۰	PSNR روش ML [۳۰-۳۲] غيركور[۴۱]	PSNR روش ML [۳۰-۳۲] كور	BSNR
۱۹/۹۴	۲۴/۱۲	۱۹/۴۵	۲۱/۷۱	۱۰
۲۷/۳۶	۲۶/۳۴	۱۹/۸۵	۲۳/۴۹	۲۰
۳۲/۹۶	۳۰/۱۲	۱۹/۹۴	۲۳/۷۹	۳۰
۳۷/۳۲	۳۲/۸۰	۱۹/۹۷	۲۳/۸۴	۴۰

با توجه به توابع محوشدگي مختلف به‌كار رفته و با مقايسه مقادير واقعي و تخمين زده شده اين توابع در شكل ۳ عملكرد مطلوب و مقاوم الگوريتم پيشنهادي اين مقاله براي پايگاه داده حاصل از تصاوير اولتراسوند سه‌بعدي قابل مشاهده است. همچنين از شكل ۵ نيز مي‌توان روند همگرايي الگوريتم تكراري مذكور در اين مقاله را مشاهده نمود. با توجه به گام‌هاي تكرار aj=۰/۳، bj=۰/۵ كه براي پايگاه داده اين بخش مورد استفاده قرار گرفته است حداكثر تعداد گام‌هاي تكرار برابر ۳۰ براي همگرايي نهايي كافي است. مقادير كوچك‌تر اين متغيرها به كند شدن الگوريتم و مقادير بزرگ آنها به عدم همگرايي الگوريتم منجر خواهد شد و انتخاب تعداد نهايي تكرارها بستگي به داده مورد پردازش و گام‌هاي تكرار الگوريتم خواهد داشت. ارزيابي دقيق‌تر گام‌ها و تعداد تكرارها را مي‌توان به‌طور دقيق‌تري در جدول ۲ ارزيابي كرد. همان‌طور كه مشاهده مي‌شود انتخاب مقادير مناسب‌تر تا ۵dB دسيبل مقدار سيگنال به اغتشاش خروجي را افزايش خواهد داد.

۴-۶- اعمال الگوريتم بر روي داده واقعي

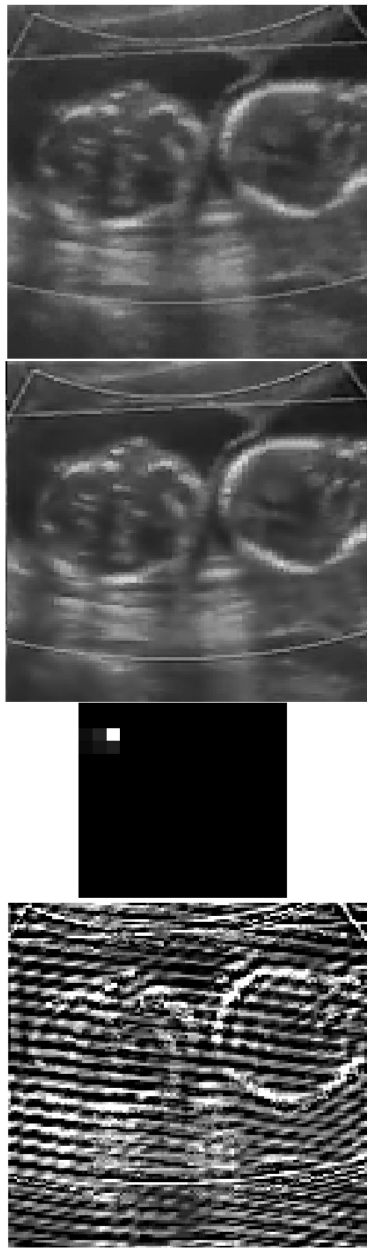
شبيه‌سازي‌هاي صورت گرفته تاكنون مربوط به تصاويري است كه به صورت ساختگي دچار محوشدگي و اغتشاش شده‌اند تا امكان ارزيابي كمي اين روش فراهم گردد. شكل ۶ نتايج حاصل از اعمال الگوريتم به پايگاه داده بخش ۲-۶ (دنباله اولتراسوند كه به صورت واقعي دچار محو شدگي است) براي يكي از تصاوير را نشان مي‌دهد. بر اين اساس از فريم قبل و بعد به عنوان مشاهدات متوالي از يك صحنه استفاده مي‌شود. همان‌طور كه در اين شكل نشان داده شده است اعمال الگوريتم مطرح شده در مرجع [۴] كه يكي از روش‌هاي مطرح شده در سال‌هاي اخير با عملكرد مطلوب‌تر نسبت به روش‌هاي قبلي است روي داده‌ها به نتيجه مطلوبي منجر نمي‌شود كه علت آن را مي‌توان همگرا نبودن اين الگوريتم با توجه به نوع PSF داده مورد نظر دانست. در واقع گرچه به نظر نمي‌رسد اغتشاش باقيمانده از عمليات محوشدگي با اين روش، اغتشاش باقيمانده از محوشدگي

[40] **P**eak **S**ignal-to-**N**oise **R**atio

[41] Nonblind

[42] **M**aximum **L**ikelihood

باشد، اما عدم همگرايي الگوريتم به علت ناتواني در تخمين صحيح PSF سبب مي‌شود الگوريتم در مرحله تضعيف برخي قسمت‌ها (حاصل از اغتشاش) و تقويت ديگر قسمت‌ها (همچون لبه‌ها) به اشتباه نواحي را تشخيص داده و از آنجا كه از داده‌هاي تكرار بعد از تكرار قبل استفاده مي‌نمايند اين اشتباه تكرار شده و الگوريتم به همگرايي مطلوب نرسد.



شكل ۶- تصاوير به ترتيب از بالا به پايين:
تصوير محوشده، تصوير بازيابي شده با الگوريتم ارائه شده در اين مقاله، تابع PSF تخمين زده شده و تصوير بازيابي شده به‌وسيله روش ارائه شده در مرجع [۴]

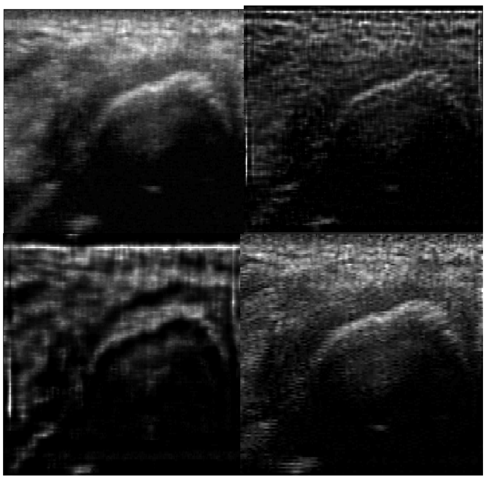
البته اين موضوع ممكن است براي الگوريتم ارائه شده در اين مقاله نيز پيش آمده و الگوريتم واگرا شود. براي بررسي دقيق‌تر اين موضوع تعدادي تصوير اولتراسوند فاقد محوشدگي با توابع محوشدگي و اغتشاش با BSNRهاي مختلف توليد شد و الگوريتم ارائه شده در اين مقاله با روش مطرح شده در مرجع [۴] از لحاظ PSNR مورد مقايسه قرار گرفت. به عنوان نمونه براي BSNR=۵ ميزان بهبود PSNR روش اين مقاله نسبت به روش مطرح شده در مرجع [۴] به ميزان ۱/۵۸dB و براي BSNR=۱۲ ميزان بهبود PSNR برابر ۰/۹۲dB است. اين در حاليست كه براي BSNR=۱۸ روش مطرح شده در مرجع [۴] به ميزان ۱/۴۰dB PSNR بالاتري نسبت به روش مطرح شده در اين مقاله دارد. بر اين اساس مي‌توان براي اين دسته از تصاوير و PSF به كار رفته چنين قضاوت نمود كه الگوريتم مطرح شده در اين مقاله براي حالاتي كه با BSNR كمتري در مشاهدات مواجه هستيم داراي پايداري بيشتري نسبت به روش مطرح در مرجع [۴] است.

در مقايسه زمان اجراي الگوريتم مطرح شده در اين مقاله و روش مطرح شده در مرجع [۴] نيز زمان اجراي الگوريتم براي ۳۰ تكرار به ترتيب ۰/۶۶ و ۰/۷۶ دقيقه براي هر تصوير است كه نشان دهنده سريع‌تر بودن الگوريتم پيشنهادي در اين مقاله است. با وجود اين گرچه الگوريتم مورد اشاره در اين مقاله از نتايج مطلوبي برخوردار است اما علاوه بر وابستگي آن به گام‌هاي تكرار، ضعف عمده آن را مي‌توان در زمان نسبتاً قابل توجه اجراي الگوريتم دانست كه در برخي از كاربردهاي نيازمند به پردازش همزمان داده، اجراي الگوريتم در محيط‌هاي نرم افزاري سريع‌تر ضروري خواهد بود. نكته شايان توجه ديگر در اين الگوريتم و ديگر الگوريتم‌هاي تكراري امكان عدم همگرايي آن در صورت عدم انتخاب صحيح پارامترهاي اوليه است. گرچه در مقايسه با الگوريتم مطرح شده در مرجع [۴] اين روش مقاومت بهتري در برابر تغيير پارامترهاي اوليه از خود نشان مي‌دهد ولي در الگوريتم‌هاي تكراري همواره امكان عدم همگرايي مطلوب در شرايط خاص وجود خواهد داشت.

براي ارزيابي كيفي اين الگوريتم؛ دنباله حاصل از عمليات محوشدگي و دنباله اوليه ۲۵۶×۲۴۰×۳۲۰ به دو نفر متخصص آشنا به تصاوير سونوگرافي ارائه شد و از آنها درخواست شد تا دنباله مشاهده شده را از ۱ تا ۴ درجه‌بندي كنند (بهترين كيفيت=۴). اين ارزيابي هم براي دنباله كامل به صورت يكجا و هم براي ۱۰ تصوير متناظر انتخابي از دو دنباله انجام پذيرفت. ميانگين نتايج حاصل از اين ارزيابي در جدول ۳ قابل مشاهده است.

جدول ۳- مقايسه خروجي الگوريتم و دنباله اوليه بر اساس نظريه متخصص (بهترين حالت=۴)

	داده اوليه	خروجي الگوريتم
تصوير شماره ۱	۲/۵	۳
تصوير شماره ۲	۳	۳
تصوير شماره ۳	۳/۵	۳/۵
تصوير شماره ۴	۴	۴
تصوير شماره ۵	۲/۵	۳/۵
تصوير شماره ۶	۲/۵	۳
تصوير شماره ۷	۱/۵	۳
تصوير شماره ۸	۲	۲/۵
تصوير شماره ۹	۲/۵	۳/۵
تصوير شماره ۱۰	۲/۵	۳/۵
كل دنباله	۲	۳



شكل ۷- تصاوير رديف اول از چپ به راست: تصوير اوليه، تصوير بازيابي شده با الگوريتم كور ارائه شده در مراجع [۳۰-۳۲]. تصاوير رديف دوم از چپ به راست: تصوير بازيابي شده با استفاده از الگوريتم غيركور ارائه شده در مراجع [۳۰-۳۲] و تصوير بازيابي شده با استفاده از روش ارائه شده در اين مقاله

جدول ۴- مقايسه خروجي الگوريتم‌هاي مطرح مراجع [۳۰-۳۲] با روش ارائه شده در اين مقاله بر اساس نظريه متخصص براي كل دنباله اولتراسوند اخذ شده از مچ دست (بهترين حالت=۴)

داده اوليه	الگوريتم‌هاي مراجع [۳۰-۳۲]		خروجي الگوريتم اين مقاله
	غيركور	كور	
۲/۵	۲	۲/۵	۳

به منظور مقايسه الگوريتم اين مقاله با ديگر روش‌ها، علاوه بر پايگاه داده سونوگرافي از پايگاه داده حاصل از تصاوير مچ دست نيز استفاده شده است. شكل ۷ نمونه يكي از فريم‌ها و تصاوير بازيابي شده با الگوريتم اين مقاله و روش‌هاي مطرح شده در مراجع [۳۲-۳۰] را نشان مي‌دهد. علاوه بر برتري ديداري مشاهده شده در اين تصوير، نتايج كل دنباله به دو نفر متخصص ارائه شده كه ميانگين نظر آنان در اين زمينه در جدول ۴ قابل مشاهده است. شايان توجه است كه تمامي الگوريتم‌هاي انتخابي در اين جدول براي دنباله تصاوير مورد نظر همگرا مي‌شوند.

۷- نتيجه‌گيري

در اين مقاله الگوريتمي مبتني بر دو گام تخمين و بهبود كيفيت تخمين به منظور كاهش محوشدگي تصاوير اولتراسوند ارائه شد. بدين منظور با استفاده از روش تكراري گراديان تخمين اوليه‌اي از داده تميز و PSF به دست آمده و سپس تخمين PSF با روش كاهش اغتشاش LPA-ICI و تخمين تصوير تميز با روش كاهش اغتشاش در حوزه ويولت مختلط مبتني بر توزيع لاپلاس محلي و تخمين زننده بيشينه كننده تابع توزيع پسين بهبود مي‌يابد.

معمولاً در ديگر كاربردها نظير تصويرگيري تشديد مغناطيسي، راديومتري، تصويرگيري نجومي، سنجش از راه دور و تصويرگيري ماهواره‌اي، به عللي همچون آشفتگي جريان هوا، لرزش، تنظيم نبودن كانون و حركت نسبي شئ نسبت به دوربين مشاهدات داراي محوشدگي و اغتشاش هستند. براين اساس در اين كاربردها نيز به منظور بهبود كيفيت تصوير مي‌توان از مشاهدات چندگانه از يک صحنه و پردازش اطلاعات حاصل از آن مطابق روش مطرح شده

در این مقاله استفاده نمود.

برای کارهای آتی پیشنهاد می‌شود کل الگوریتم در حوزه ویولت مختلط انجام پذیرد و گام‌های تخمین اولیه و کاهش اغتشاش همگی بر روی زیرباندهای بالاگذر ویولت اعمال گردد.

مراجع

[1] Sroubek F. and Flusser J., Multichannel blind iterative image restoration, IEEE Trans. Image Processing, 2003; 12(9): 1094-1106.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Point_spread_function, visited on 13 Dec. 2009, updated on 14 June 2009.

[3] Katkovnik V., Egiazarian K., and Astola J., A Spatially Adaptive Nonparametric Regression Image Deblurring, IEEE Trans. Image Processing, 2005; 14(10): 1469-1478.

[4] Katkovnik V., Paliy D., Egiazarian K., and Astola J., Frequency domain blind deconvolution in multiframe imaging using anisotropic spatially-adaptive denoising, in Proc. 14th European Signal Process. Conf., EUSIPCO 2006, Florence, Sept. 2006.

[5] Banham M. and Katsaggelos A., Digital image restoration, IEEE Signal Processing Mag., 1997; 14(2): 24–41.

[6] Kundur D. and Hatzinakos D., Blind image deconvolution, IEEE Signal Processing Mag., 1996; 13(3): 43–64.

[7] Chan T., Osher S., Shen J., The digital TV filter and nonlinear denoising, IEEE Trans. Image Processing, 2001; 10(10): 231-241.

[8] Panci G., Campisi P., Colonnese S., and Scarano G., Multichannel blind image deconvolution using the Bussgang algorithm: Spatial and multiresolution approaches, IEEE Trans. Image Processing, 2003; 12(11): 1324-1337.

[9] Harikumar G. and Bresler Y., Perfect blind restoration of images blurred by multiple filters: Theory and efficient algorithm, IEEE Trans. Image Processing, 1999; 8(2): 202-219.

[10] Harikumar G. and Bresler Y., Exact image deconvolution from multiple FIR blurs, IEEE Trans. Image Processing, 1999; 8(6): 846-862.

[11] Giannakis G.B. and Heath Jr. R.W., Blind identification of multichannel FIR blurs and perfect image restoration, IEEE Trans. Image Processing, 2000; 9(11): 1877-1896.

[12] Sroubek F. and Flusser J., Multichannel blind deconvolution of spatially misaligned images, IEEE Trans. Image Processing, 2005; 14(7): 874-883.

[13] Taxt T., Strand J., Two-dimensional noise-robust blind deconvolution of ultrasound images, IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2001; 48(4): 861-866.

[14] Abeyratne U.R., Petropulu A.P., Reid J.M., Golas T., Conant E., Forsberg F., Higher order versus second order statistics in ultrasound image deconvolution, IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 1997; 4(6): 1409-1416.

[15] Guerrero-Colon J.A., Mancera L., Portilla J., Image restoration using space-variant Gaussian scale mixtures in overcomplete pyramids, IEEE Trans. on Image Processing, 2008; 17(1): 27-41.

[16] Katkovnik V., Egiazarian K., and Astola J., Adaptive window size image de-noising based on intersection of confidence intervals (ICI) rule, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2002; 16: 223-235.

[17] Foi A., Katkovnik V., and Egiazarian K., Pointwise shape-adaptive DCT for high-quality denoising and deblocking of grayscale and color images, IEEE Trans. Image Processing, 2007; 16(5): 1395-1411.

[18] Selesnic I.W.k, Baraniuk R.G., and Kingsbury N., The dual-tree complex wavelet transform - A coherent framework for multiscale signal and image processing, IEEE Signal Processing Magazine, 2005; 22(6): 123-151.

[19] Rabbani H., Vafadoost M., Noise reduction based on a local Laplace pdf in complex wavelet domain, in Proc. 4th Iranian Conference of Machine Vision and Image Processing (MVIP07), Mashad, Feb. 2007.

[20] Tikhonov A., On the stability of inverse problems, Doklady Akademii Nauk SSSR, 1943; 39(5): 195-198.

[21] Chambolle A., Inverse problems in image processing and image segmentation: some mathematical and numerical aspects, Springer Lecture Notes, Sept. 2000.

[22] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, Phys. D, 1992; 60: 259-268.

[23] Mumford D. and Shah J., Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems, Comm. Pure Applied Math., 1989; 42: 577-685.

[24] Deuflhard P., Newton Methods for Nonlinear Problems. Affine Invariance and Adaptive Algorithms. Springer Series in Computational Mathematics, vol. 35. Springer, Berlin, 2004.

[25] Donoho D.L. and Johnstone I.M., Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, Biometrika, 1994; 81(3): 425–455.

[26] Crouse M.S., Nowak R.D., and Baraniuk R.G., Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models, IEEE Trans. Signal Processing, 1998; 46(4): 886–902.

[27] Chang S.G., Yu B., and Vetterli M., Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression, IEEE Trans. Image Process., 2000; 9(9): 1532–1546.

[28] Portilla J., Strela V., Wainwright M.J., and Simoncelli E.P., Image denoising using gaussian scale mixtures in the wavelet domain, IEEE Trans. Image Processing., 2003; 12(11): 1338–1351.

[29] Kingsbury N.G., A dual-tree complex wavelet transform with improved orthogonality and symmetry properties, in Proc. ICIP, 2000; 2: 375–378.

[30] Richardson W.H., Bayesian-Based Iterative Method of Image Restoration, JOSA, 1972; 62(1): 55–59.

[31] Lucy L.B., An iterative technique for the rectification of observed distributions, Astronomical Journal, 1974; 79(6): 745–754.

[32] Vega-Alvarado L., Elezgaray I., Hemar A., Menard M., Ranger C., Corkidi G., A comparison of image deconvolution algorithms applied to the detection of endocytic vesicles in fluorescence images of neural proteins, in Proc. 29th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, 22-26 Aug. 2007: 755 – 758.