

Proposal and Analysis of Fractional Order Mathematical Model to Describe the Transmission of Covid-19 Disease

Marzban, Arman¹ / Amini Boroujeni, Elham^{2*}

¹ - M.Sc. Student, Department of Electrical and Computer Engineering, Faculty of Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran

² - Assistant Professor, Department of Electrical and Computer Engineering, Faculty of Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

DOI: 10.22041/ijbme.2023.1996296.1832

Received: 15 March 2023

Revised: 4 June 2023

Accepted: 19 June 2023

KEYWORDS

Covid-19
Fractional Order Calculus
Mathematical Modeling
Existence and Uniqueness of the Answer

ABSTRACT

Considering that mathematical modeling is helpful in describing and analyzing the behavior of epidemic diseases. On the other hand, the accuracy and degree of freedom in modeling fractional order systems are more than that of integer order systems due to the presence of long-term memory property. This paper extends the existing integer order model of Covid-19 disease to fractional order systems using fractional order calculations. The proposed model's positivity and bounded answers are proved using the invariant region theorem. Using the fixed point theory in Banach space, the existence and uniqueness of the solution of the proposed fractional order model are proved. The behavior of both integer and fractional order has been simulated and evaluated using real information published for Covid-19 in Thailand. The higher efficiency and accuracy of the proposed model of fractional order are confirmed in the simulation results.

***Corresponding Author**

Address	Department of Electrical and Computer Engineering, Faculty of Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran		
Postal Code	15719-14911	Tel	+98-21-88830891
E-Mail	e.amini.b@khu.ac.ir	Fax	+98-21-88830891





پیشنهاد و تحلیل مدل ریاضی مرتبه‌ی کسری برای توصیف انتقال بیماری کووید-۱۹

مرزبان، آرمان^۱ / امینی بروجنی، الهام^{۲*}

^۱ - دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

^۲ - استادیار، گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

مشخصات مقاله

شناسه‌ی دیجیتال: 10.22041/ijbme.2023.1996296.1832

پذیرش: ۲۹ خرداد ۱۴۰۲

بازنگری: ۱۴ خرداد ۱۴۰۲

ثبت در سامانه: ۲۴ اسفند ۱۴۰۱

چکیده

واژه‌های کلیدی

با توجه به این که مدل‌سازی ریاضی در توصیف و تحلیل رفتار بیماری‌های همه‌گیر کمک کننده بوده و از طرفی دقت و درجه‌ی آزادی در مدل‌سازی سیستم‌های مرتبه‌ی کسری به دلیل وجود ویژگی حافظه‌ی بلند مدت بیش‌تر از سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح می‌باشد، در این مقاله با استفاده از حسابان مرتبه‌ی کسری، مدل مرتبه‌ی صحیح موجود برای توصیف انتقال بیماری کووید-۱۹ به حوزه‌ی سیستم‌های مرتبه‌ی کسری بسط داده شده است. مثبت و محدود بودن پاسخ‌های مدل مرتبه‌ی کسری پیشنهادی با استفاده از قضیه‌ی ناحیه‌ی ثابت اثبات شده و به کمک تئوری نقطه‌ی ثابت در فضای باناخ، وجود و یکتایی جواب مدل مرتبه‌ی کسری پیشنهادی نشان داده شده است. همچنین رفتار دو مدل مرتبه‌ی صحیح و مرتبه‌ی کسری با بهره‌گیری از اطلاعات واقعی منتشر شده برای بیماری کووید-۱۹ در کشور تایلند شبیه‌سازی شده و مورد ارزیابی قرار گرفته است. کارایی و دقت بیش‌تر مدل پیشنهادی مرتبه‌ی کسری در نتایج شبیه‌سازی تایید شده است.

کووید-۱۹

حسابان مرتبه‌ی کسری

مدل‌سازی ریاضی

وجود و یکتایی جواب

*نویسنده‌ی مسئول

نشانی گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

تلفن +۹۸-۲۱-۸۸۸۳۰۸۹۱

دورنگار

۱۵۷۱۹-۱۴۹۱۱

+۹۸-۲۱-۸۸۸۳۰۸۹۱

e.amini.b@khu.ac.ir

کد پستی

پست الکترونیک



۱- مقدمه

حسابان کسری به تعمیم مشتق و انتگرال مرتبه‌ی صحیح به مرتبه‌ی کسری می‌پردازد. در چند دهه‌ی گذشته، حساب کسری و معادلات دیفرانسیل کسری در رشته‌های مختلف کاربرد پیدا کرده است. با توجه به این کاربردهای روزافزون، توجه فراوانی به راه‌حل‌های دقیق و عددی معادلات دیفرانسیل کسری شده است. در مقالات زیادی به وجود و یکتا بودن روش‌های تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری [۱] و پایداری آن‌ها پرداخته شده است [۲-۴].

ویروس عامل بیماری کووید-۱۹ یا ویروس کرونا یک بیماری عفونی تازه ظهور کرده که در دسامبر ۲۰۱۹ در شهر ووهان چین شروع شده و به سرعت در سراسر جهان گسترش یافته است [۵]. اگر چه میزان بهبودی بیش‌تر از میزان مرگ و میر بوده اما عفونت کووید-۱۹ برای جامعه‌ی بشری بسیار مضر است و باعث ضررهای مالی و اقتصادی می‌شود [۶]. ویروس‌هایی که باعث بیماری‌های مشترک سرماخوردگی و بیماری‌های کشنده مانند سندرم تنفسی متوسط و سندرم تنفسی حاد شدید می‌شوند از خانواده‌ی ویروس‌های کرونا هستند [۷]. علائم بیماری کووید-۱۹ می‌تواند شامل علائم سرماخوردگی عادی مانند تب و لرز، سرفه، تنگی نفس، مشکلات حاد تنفسی و مشکلات گوارشی باشد که طی ۲ الی ۱۰ روز ظاهر می‌شود. ویروس کرونا علاوه بر دستگاه تنفسی می‌تواند بخش‌های حیاتی دیگر بدن مانند کلیه، قلب و مغز را نیز درگیر کند. هم‌چنین شدت بیماری در سالمندان و افراد دارای بیماری‌های زمینه‌ای مانند فشار خون بالا، بیماری‌های قلبی و دیابتی بیش‌تر است [۷، ۸]. سیاست‌گذاران مداخله‌ی غیردارویی مانند فاصله‌گذاری اجتماعی، قرنطینه‌ی شخصی، جداسازی افراد مبتلا، استفاده از ماسک، کیت‌های محافظ برای پرسنل پزشکی و محدودیت‌های سفر را برای به حداقل رساندن شیوع بیماری وضع کرده‌اند [۶]. مدل‌سازی ریاضی در درک عمیق‌تر مکانیسم‌های انتقال بیماری همه‌گیر کووید-۱۹ موثر بوده و به توسعه‌ی سیاست‌ها و راه‌کارهای رعایت بهداشت عمومی کمک کرده است. اکثر مدل‌های بیماری همه‌گیر کووید-۱۹ را می‌توان به طور کلی با انواع مدل‌های مبتنی بر جمعیت^۱ (SIR) مدل‌سازی کرد. این مدل‌ها توسط معادلات دیفرانسیل یا مدل‌های مبتنی بر عامل نشان داده شده که در آن‌ها افراد معمولاً در یک ساختار و تبادل عفونت به صورت تصادفی تعامل دارند [۹]. مدل‌سازی‌های ارائه شده‌ی ابتدایی از نوع مدل‌های غیرخطی دینامیکی مرتبه‌ی صحیح بوده است [۱۰]. کمبود اطلاعات راجع به بیماری در

اوایل شیوع آن سبب شده است که مدل‌های ریاضی مرتبه‌ی پایین با حسابان صحیح برای توصیف رفتار بیماری ارائه شود [۱۱]. با گذشت زمان محققان بخش‌ها و پارامترهایی که در رفتار بیماری دخیل و تاثیرگذار بوده را لحاظ نموده و مدل‌های ریاضی مرتبه‌ی صحیح دقیق‌تری را ارائه کرده‌اند [۹-۱۲].

با توجه به رفتار این بیماری در واقعیت و جهش‌های ناگهانی آن، پژوهش‌گران با استفاده از مدل‌های مرتبه‌ی کسری که نسخه‌ی توسعه یافته‌ی مدل‌های مرتبه‌ی صحیح بوده و توجه به این نکته که دقت و درجه‌ی آزادی سیستم‌های مرتبه‌ی کسری به دلیل دارا بودن ویژگی حافظه‌ی بلند مدت بیش‌تر از حالت صحیح متناظر آن‌ها در توصیف رفتار پدیده‌های دینامیکی است، مدل‌های مرتبه‌ی کسری متنوعی برای توصیف رفتار این بیماری ارائه کرده‌اند [۱۳-۱۵].

در این مقاله یک مدل ریاضی مرتبه‌ی ۹ در حوزه‌ی حسابان صحیح که مطالعه‌ی جامعی روی بخش‌های تاثیرگذار جامعه در انتقال بیماری دارد در نظر گرفته شده و سپس با استفاده از حسابان کسری به حوزه‌ی سیستم‌های مرتبه‌ی کسری بسط داده شده است. با توجه به درجه‌ی آزادی بیش‌تر سیستم‌های مرتبه‌ی کسری نسبت به سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح، عمل کرد سیستم مرتبه‌ی کسری پیشنهادی روی داده‌های واقعی کشور تایلند بررسی شده و مشخص شده که این مدل دارای عمل کرد بهتر و دقیق‌تری نسبت به سیستم مرتبه‌ی صحیح است.

در ادامه در بخش ۲ مقدمات ریاضی مورد نیاز معرفی شده است. در بخش ۳ مدل مرتبه‌ی کسری پیشنهادی برای توصیف انتقال بیماری کووید-۱۹ بیان شده و تحلیل پاسخ مدل پیشنهادی در بخش ۴ انجام شده است. بخش ۵ به شبیه‌سازی نتایج اختصاص داده شده و در بخش ۶ جمع‌بندی مطالب مطرح شده است.

۲- مقدمات ریاضی

در این بخش مفاهیم پایه‌ای مشتقات و انتگرال مرتبه‌ی کسری مورد استفاده در این مقاله معرفی شده که مباحث کامل‌تر آن در مرجع [۱۶] قابل مشاهده است.

تعریف ۱: انتگرال مرتبه‌ی کسری از مرتبه‌ی α تابع $f(t)$ در بازه‌ی زمانی a تا t به صورت رابطه‌ی (۱) بوده که در این رابطه $\alpha \in R^+$ و aI_t^α عمل‌گر انتگرال مرتبه‌ی کسری است.

$$aI_t^\alpha f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

^۱ Susceptible-Infected-Recovered



بنابراین کل جمعیت جامعه که با N نشان داده شده به صورت رابطه‌ی (۵) تعریف می‌شود.

$$N(t) = S_u(t) + S_{sq}(t) + E_u(t) + E_q(t) + I_s(t) + I_i(t) + I_a(t) + I_{icu}(t) + R(t) \quad (5)$$

مدل مرتبه‌ی صحیح مرجع [۱۷] جهت بیان نرخ تغییرات در هر یک از بخش‌های جامعه به صورت رابطه‌ی (۶) است.

$$\begin{cases} \dot{S}_u(t) = \Lambda - A_1 \lambda S_u + \psi_q S_{sq} - \mu S_u \\ \dot{S}_{sq}(t) = (1-p)\lambda S_u - A_2 S_{sq} - \mu S_{sq} \\ \dot{E}_u(t) = (1-q)p\lambda S_u - A_3 E_u \\ \dot{E}_q(t) = qp\lambda S_u + \alpha_u E_u - A_4 E_q \\ \dot{I}_s(t) = \delta_u \sigma_u E_u - A_5 I_s \\ \dot{I}_i(t) = \gamma \sigma_q E_q + \phi_s I_s + \sigma_a I_a - A_6 I_i \\ \dot{I}_a(t) = A_7 \sigma_u E_u + (1-\gamma)\sigma_q E_q - A_8 I_a \\ \dot{I}_{icu}(t) = \nu_i I_i - A_9 I_{icu} \\ \dot{R}(t) = r_s I_s + r_i I_i + r_a I_a + r_{icu} I_{icu} - \mu R \end{cases} \quad (6)$$

در این رابطه ضرایب A_1 تا A_9 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} A_1 = (1-p) + (1-q)p + qp \\ A_2 = \psi_q + \mu \\ A_3 = \alpha_u + \sigma_u + \mu \\ A_4 = \sigma_q + \mu \\ A_5 = r_s + \phi_s + m_s + \mu \\ A_6 = r_i + \nu_i + m_i + \mu \\ A_7 = (1-\delta_u)\sigma_u \\ A_8 = r_a + \nu_a + m_a + \mu \\ A_9 = r_{icu} + m_{icu} + \mu \end{cases} \quad (7)$$

پارامتر Λ نرخ ورود به بیماری، μ نرخ مرگ و میر طبیعی و $p\lambda$ نرخ ابتلا به ویروس با احتمال عفونت p است. در طبقات حساس، جمعیت‌های قرنطینه نشده با نرخ $(1-p)\lambda$ قرنطینه شده و از قرنطینه آزاد می‌شوند و با نرخ ψ_q به طبقه‌ی قرنطینه نشده باز می‌گردند. علاوه بر این آن‌ها به ترتیب با نرخ‌های $qp\lambda$ و $(1-q)p\lambda$ به کلاس‌های در معرض قرنطینه و بدون قرنطینه با نرخ قرنطینه‌ی q حرکت می‌کنند. در طبقه‌ی در معرض، انتقال بیماری وجود ندارد زیرا در مرحله‌ی نهفتگی^۴ ویروس است. دوره‌های نهفتگی غیرقرنطینه و قرنطینه به ترتیب با σ_u و σ_q تعریف می‌شوند. جمعیت‌های قرنطینه نشده با نرخ α_u (نرخ ردیابی تماس) قرنطینه شده و در پایان دوره‌ی نهفتگی به ترتیب با نرخ‌های $\sigma_u \delta_u$ و $(1-\delta_u)\sigma_u$ به کلاس‌های عفونی علامت‌دار و بدون علامت منتقل می‌شوند. علاوه بر این جمعیت‌های قرنطینه شده نیز در پایان دوره‌ی نهفتگی به ترتیب با نرخ‌های $\gamma\sigma_q$ و $(1-\gamma)\sigma_q$ به کلاس‌های عفونی علامت‌دار و بدون علامت منتقل می‌شوند. در طبقات آلوده، جمعیت‌های

تعریف ۲: مشتق مرتبه‌ی کسری با تعریف کپوتو^۱ از مرتبه‌ی α تابع $f(t)$ به صورت رابطه‌ی (۲) بوده که در آن ${}^C D_t^\alpha$ عمل‌گر مشتق مرتبه‌ی کسری با تعریف کپوتو و $m = [\alpha]$ یا به عبارتی m برابر با کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی α است.

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (2)$$

تعریف ۳: تابع میتگ-لفلر^۲ دو پارامتری که تعمیم یافته‌ی تابع نمایی بوده و تابعی پرکاربرد در حوزه‌ی معادلات دیفرانسیل کسری است به صورت رابطه‌ی (۳) تعریف می‌شود.

$$E_{(\alpha,\beta)}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha, \beta > 0 \quad (3)$$

در این رابطه عمل‌گر Γ بیان‌گر تابع گاما^۳ است و به صورت رابطه‌ی (۴) تعریف می‌شود.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad x \in R^+ \cup \{0\} \quad (4)$$

۳- پیشنهاد مدل ریاضی مرتبه‌ی کسری جهت توصیف انتقال بیماری کووید-۱۹

با توجه به مدل پیشنهادی مرجع [۱۷] جهت مدل‌سازی ریاضی بیماری، کل جمعیت جامعه به ۹ بخش زیر تقسیم شده است.

۱- S_u : افراد حساس قرنطینه نشده

۲- S_{sq} : افراد مستعد قرنطینه شده که در قرنطینه‌ی دولتی هستند

۳- E_u : افراد در معرض قرنطینه نشده

۴- E_q : افراد در معرض قرنطینه، افرادی که در معرض بیماری قرار گرفته و آلوده هستند اما علائمی از خود نشان نداده و نمی‌توانند عفونت را منتقل کنند

۵- I_s : افراد عفونی که آلوده هستند و علائم بیماری کووید-۱۹ را نشان می‌دهند

۶- I_a : افراد بدون علامت-عفونی، افرادی که آلوده شده‌اند اما علائم بالینی خفیف داشته یا بدون علائم بالینی هستند

۷- I_i : افراد عفونی ایزوله شده، افرادی که در بیمارستان‌ها و قرنطینه‌ی ایالتی ایزوله شده‌اند

۸- I_{icu} : افرادی که نیاز به بخش مراقبت‌های ویژه دارند

۹- R : افراد بهبود یافته

^۱ Gamma Function

^۲ Incubation

^۳ Caputo

^۴ Mittag-Leffler Function

$$\lambda = \frac{\beta_{so}(I_s(t) + \eta_a I_a(t))}{S_u(t) + E_u(t) + I_s(t) + I_a(t) + R(t)} \quad (9)$$

$${}^C_0 D_t^\alpha D(t) = m_s I_s + m_i I_i + m_a I_a + m_{icu} I_{icu} \quad (10)$$

با لحاظ کردن این نکته که مقدار جمعیت همواره عددی مثبت است، بردار شرایط اولیه برای مدل بیان شده در روابط (۶) و (۸) به صورت رابطه‌ی (۱۱) تعریف می‌شود.

$$IC = [S_u(0), S_{sq}(0), E_u(0), E_q(0), I_s(0), I_i(0), I_a(0), I_{icu}(0), R(0)]^T \quad (11)$$

۴- تحلیل مدل ریاضی مرتبه‌ی کسری پیشنهاد

شده برای توصیف انتقال بیماری کووید-۱۹

در این بخش به تحلیل و بررسی پاسخ مثبت و نقاط تعادل مدل پیشنهادی مرتبه‌ی کسری کووید-۱۹ معرفی شده در رابطه‌ی (۸) پرداخته شده و سپس رفتار آن با بهره‌گیری عدد بازتولید اساسی و وجود و یکتایی جواب تحلیل شده است.

۴-۱- ناحیه‌ی ثابت

از روش ناحیه‌ی ثابت^۱ برای بررسی غیرمنفی بودن تمام اجزای مدل رابطه‌ی (۸) استفاده شده است. از آنجا که مقدار جمعیت منفی معنادار نیست، در قضیه‌ی ۱ نشان داده شده که تمام حل‌های مدل بیماری کووید-۱۹ در رابطه‌ی (۸) غیرمنفی است. ابتدا مجموعه‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\mathcal{A} = \left\{ S_u, S_{sq}, E_u, E_q, I_s, I_i, I_a, I_{icu}, R \in \mathbb{R}_+^9; N(t) \leq \frac{\Lambda}{d} \right\}$$

حال نشان داده شده که مجموعه‌ی بسته‌ی \mathcal{A} ناحیه‌ی شدنی^۲ سیستم مرتبه‌ی کسری با رابطه (۸) است.

قضیه‌ی ۱: مجموعه‌ی بسته‌ی $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_+^9$ با هر شرط اولیه‌ی غیرمنفی در \mathbb{R}_+^9 برای مدل مرتبه‌ی کسری رابطه‌ی (۸) به صورت ثابت و مثبت است. اثبات: دو رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\delta = \min\{m_s, m_i, m_a, m_{icu}\}$$

$$d = \min\{\mu, \delta\}$$

برای به دست آوردن مشتق کسری کل جمعیت، تمام روابط موجود در رابطه‌ی (۸) جمع شده و سپس روابط زیر به دست آمده است.

عفونی علامت‌دار و بدون علامت به ترتیب با ردیابی تماس با نرخ‌های ϕ_s و σ_a جدا می‌شوند. به علاوه افراد ایزوله با نرخ v_i به کلاس‌های بخش مراقبت‌های ویژه منتقل می‌شوند. در مرحله‌ی بعد، نرخ بهبودی و میزان مرگ و میر ناشی از همه‌گیری بیماری در طبقات آلوده‌ی I_s, I_i, I_a و I_{icu} به ترتیب با r_{icu}, r_a, r_i, r_s و m_{icu}, m_a, m_i, m_s تعریف می‌شود. مقادیر پارامترهای ثابت مدل در جدول (۱) ارائه شده است.

جدول (۱) - مقادیر ثابت پارامترهای مدل

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
β_{so}	۰/۹۵۱۹	r_s	۰/۱
p	۰/۸۸۹۱	r_i	۰/۱۲۵
σ_a	۰/۲۵۳۳	r_a	۰/۱۳۹۷۸
α_u	۰/۰۳۲۶	r_{icu}	۰/۱
q	۰/۰۳۹۷	m_s	۰/۰۰۰۱۱
ε_v	۰/۷۵	m_i	۰/۰۰۰۱۱
μ	۰/۰۰۰۲۳	m_a	۰/۵ m_s
N	۶۶۱۹۰۰۰	m_{icu}	۱/۵ m_s
Λ	μN	ϕ_s	۰/۲
ψ_q	۰/۰۷۱۴۲	γ	۰/۷
σ_u	۰/۱۹۲۳	v_i	۰/۰۲۵
σ_q	۰/۱۹۲۳	η_a	۰/۵
δ_u	۰/۲		

با توجه به ویژگی حافظه‌ی بلند مدت سیستم‌های مرتبه‌ی کسری که امکان مدل‌سازی پدیده‌های دینامیکی با دقت و درجه‌ی آزادی بیش‌تر را فراهم می‌کند، در ادامه مدل رابطه‌ی (۶) با استفاده از مشتق مرتبه‌ی کسری کیوتو به حسابان کسری بسط داده شده است. در این حالت مدل مرتبه‌ی کسری توصیف‌کننده‌ی بیماری کووید-۱۹ به صورت رابطه‌ی (۸) است.

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha S_u(t) = \Lambda - A_1 \lambda S_u + \psi_q S_{sq} - \mu S_u \\ {}^C_0 D_t^\alpha S_{sq}(t) = (1-p)\lambda S_u - A_2 S_{sq} - \mu S_{sq} \\ {}^C_0 D_t^\alpha E_u(t) = (1-q)p\lambda S_u - A_3 E_u \\ {}^C_0 D_t^\alpha E_q(t) = qp\lambda S_u + \alpha_u E_u - A_4 E_q \\ {}^C_0 D_t^\alpha I_s(t) = \delta_u \sigma_u E_u - A_5 I_s \\ {}^C_0 D_t^\alpha I_i(t) = \gamma \sigma_q E_q + \phi_s I_s + \sigma_a I_a - A_6 I_i \\ {}^C_0 D_t^\alpha I_a(t) = A_7 \sigma_u E_u + (1-\gamma)\sigma_q E_q - A_8 I_a \\ {}^C_0 D_t^\alpha I_{icu}(t) = v_i I_i - A_9 I_{icu} \\ {}^C_0 D_t^\alpha R(t) = r_s I_s + r_i I_i + r_a I_a + r_{icu} I_{icu} - \mu R \end{cases} \quad (8)$$

در این رابطه پارامتر شدت عفونت (λ) به صورت رابطه‌ی (۹) و تعداد مرگ و میر در جمعیت (D) به صورت رابطه‌ی (۱۰) تعریف می‌شود.

^۲ Feasible

^۱ Invariant Region



$$R_0 = \frac{\rho A_0}{A_3 A_4 A_5 A_8} \left((1-\gamma) A_5 \eta_a \sigma_q (A_3 q - \alpha_u q + \alpha_u) + A_4 (1-q) (A_5 A_7 \eta_a + A_8 \delta_u \alpha_u) \right) \quad (16)$$

نقطه‌ی تعادل همه‌گیری در رابطه‌ی (۱۵) اگر $R_0 > 1$ باشد به صورت مجانبی محلی پایدار است.

۴-۳- وجود و یکتایی جواب

در این بخش سعی شده است تا وجود و یکتایی پاسخ مدل پیشنهادی معرفی شده در رابطه‌ی (۸) با استفاده از تئوری نقطه‌ی ثابت مورد بررسی قرار گیرد [۱۹-۲۱]. وجود و یکتایی جواب شرایط کافی برای وجود و یکتا بودن پاسخ مدل را ایجاد کرده و به ترتیب پیوسته بودن و لپ‌شیتز بودن توابع سمت راست رابطه‌ی (۸) را نتیجه می‌دهد. سیستم با چنین شرایطی قابل پیش‌بینی‌تر و کنترل‌پذیرتر از سیستم بدون پاسخ یا دارای بی‌شمار پاسخ بوده و از این منظر برای مدل بیماری کرونا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با استفاده از تئوری نقطه‌ی ثابت نشان داده شده که سیستم مرتبه‌ی کسری رابطه‌ی (۸) به ازای بردار شرایط اولیه‌ی مثبت ذکر شده در رابطه‌ی (۱۱) دارای جواب یکتایی است. با اعمال انتگرال مرتبه‌ی کسری به سیستم مرتبه‌ی کسری رابطه‌ی (۸) رابطه‌ی زیر به دست آمده است.

$$\begin{cases} S_u(t) = S_u(0) + i(t)K_1(\tau, S_u) d\tau \\ S_{sq}(t) = S_{sq}(0) + i(t)K_2(\tau, S_{sq}) d\tau \\ E_u(t) = E_u(0) + i(t)K_3(\tau, E_u) d\tau \\ E_q(t) = E_q(0) + i(t)K_4(\tau, E_q) d\tau \\ I_s(t) = I_s(0) + i(t)K_5(\tau, I_s) d\tau \\ I_i(t) = I_i(0) + i(t)K_6(\tau, I_i) d\tau \\ I_a(t) = I_a(0) + i(t)K_7(\tau, I_a) d\tau \\ I_{icu}(t) = I_{icu}(0) + i(t)K_8(\tau, I_{icu}) d\tau \\ R(t) = R(0) + i(t)K_9(\tau, R) d\tau \end{cases} \quad (17)$$

در این رابطه $i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$ برقرار بوده و توابع K_i ($i = 1 \dots 9$) به صورت رابطه‌ی (۱۸) است.

$$\begin{aligned} K_1(\tau, S_u) &= \Lambda - \left((1-p) + (1-q)p + pq \right) \lambda S_u(t) \\ &\quad + \psi_q S_{sq}(t) - \mu S_u(t) \\ K_2(\tau, S_{sq}) &= (1-p) \lambda S_u(t) - (\psi_q + \mu) S_{sq}(t) \\ &\quad - \varepsilon_p u_v S_{sq}(t) \\ K_3(\tau, E_u) &= (1-q) p \lambda S_u(t) - (\sigma_u + \alpha_u + \mu) E_u(t) \\ K_4(\tau, E_q) &= q p \lambda S_u(t) + \alpha_u E_u(t) - (\sigma_q \\ &\quad + \mu) E_q(t) \\ K_5(\tau, I_s) &= \delta_u \sigma_u E_u(t) - (r_s + \phi_s + m_s + \mu) I_s(t) \\ K_6(\tau, I_i) &= \gamma \sigma_q E_q(t) + \phi_s I_s(t) + \sigma_a I_a(t) - (r_i + v_i \\ &\quad + m_i + \mu) I_i(t) \\ K_7(\tau, I_a) &= (1 - \delta_u) \sigma_u E_u(t) + (1 - \gamma) \sigma_q E_q(t) - (r_a \\ &\quad + v_a + m_a + \mu) I_a(t) \\ K_8(\tau, I_{icu}) &= v_i I_i(t) - (r_{icu} + m_{icu} + \mu) I_{icu}(t) \\ K_9(\tau, R) &= r_s I_s(t) + r_i I_i(t) + r_a I_a(t) + r_{icu} I_{icu}(t) \\ &\quad - \mu R(t) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} {}^C_0 D_t^\alpha N(t) &= {}^C_0 D_t^\alpha S_u(t) + {}^C_0 D_t^\alpha S_{sq}(t) \\ &\quad + {}^C_0 D_t^\alpha E_u(t) + {}^C_0 D_t^\alpha E_q(t) + {}^C_0 D_t^\alpha I_s(t) \\ &\quad + {}^C_0 D_t^\alpha I_i(t) + {}^C_0 D_t^\alpha I_a(t) + {}^C_0 D_t^\alpha I_{icu}(t) \\ &\quad + {}^C_0 D_t^\alpha R(t) = \Lambda - \mu N(t) - m_i I_i(t) - m_s I_s(t) \\ &\quad - m_a I_a(t) - m_{icu} I_{icu}(t) \\ &\leq \Lambda - \mu (S_u + S_{sq} + E_u + E_q + R) \\ &\quad - (\mu + \delta) (I_s + I_a + I_s + I_{icu}) \\ &\leq \Lambda - d (S_u + S_{sq} + E_u + E_q + R) \\ &\quad - d (I_s + I_a + I_s + I_{icu}) \leq \Lambda - dN(t) \end{aligned} \quad (12)$$

جهت حل نامعادله‌ی فوق از تبدیل لاپلاس استفاده شده که در این صورت پاسخ زمانی آن بر حسب توابع میتگ-لفلر به صورت رابطه‌ی (۱۳) است.

$$\begin{aligned} s^\alpha N(s) - s^{\alpha-1} N(0) &\leq \frac{\Lambda}{s} - dN(s) \Rightarrow N(s) \\ &\leq \frac{\Lambda}{s(s^\alpha + d)} + \frac{N(0)s^{\alpha-1} - N(0)}{(s^\alpha + d)} \Rightarrow N(t) \\ &\leq N(0)E_{\alpha,1}(-dt^\alpha) + \Lambda t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-dt^\alpha) \end{aligned} \quad (13)$$

حل مدل با شرایط اولیه‌ی غیرمنفی در ناحیه‌ی \mathcal{A} در همان مرحله باقی می‌ماند. بنابراین ناحیه‌ی \mathcal{A} به طور مثبت ثابت است و تمام حل‌های R_+^9 را جذب می‌کند.

۴-۲- بررسی نقاط تعادل و پایداری

با توجه به این که مشتق کپوتو یک ضریب ثابت برابر صفر است، بنابراین نقاط تعادل مدل کووید-۱۹ معرفی شده با رابطه‌ی (۸) شامل دو نقطه‌ی تعادل عاری^۱ از بیماری (E_{dfe}) و همه‌گیری^۲ (E_{ee}) بوده که به ترتیب در روابط (۱۴) و (۱۵) بیان شده است.

$$E_{dfe} = (S_u, S_{sq}, E_u, E_q, I_s, I_i, I_a, I_{icu}, R) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right) \quad (14)$$

$$E_{ee} = (S_u^*, S_{sq}^*, E_u^*, E_q^*, I_s^*, I_i^*, I_a^*, I_{icu}^*, R^*) \quad (15)$$

هم‌چنین رابطه‌ی زیر نیز برقرار است.

$$(S_u^*, S_{sq}^*, E_u^*, E_q^*, I_s^*, I_i^*, I_a^*, I_{icu}^*, R^*) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

جهت بررسی پایداری سیستم از تعریف عدد بازتولید اساسی استفاده شده است. از عدد بازتولید اساسی برای توصیف شیوع بیماری، اثربخشی نرخ تماس، خطر عفونت و طول مدت عفونی بودن با مقایسه‌ی میانگین تعداد موارد تازه آلوده با تعداد موارد آلوده در یک جامعه استفاده می‌شود [۱۸].

عدد بازتولید اساسی با استفاده از روش 3 NGM روی سیستم مرتبه‌ی کسری رابطه‌ی (۸) با بهره‌گیری از مرجع [۱۷] به صورت رابطه‌ی (۱۶) است.

^۱ Next Generation Matrix

^۱ Disease-Free Equilibrium

^۲ Endemic Equilibrium

به طور مشابه برای دیگر کرنل‌های K_i ($i = 2 \dots 9$) نیز با انجام مراحل بالا روابط زیر به دست آمده است.

$$\|K_2(\tau, S_{sq}) - K_2(\tau, S_{1sq})\| \leq \xi_2 \|S_{sq} - S_{1sq}\| \quad (۲۳)$$

$$\|K_3(\tau, E_u) - K_3(\tau, E_{1u})\| \leq \xi_3 \|E_u - E_{1u}\| \quad (۲۴)$$

$$\|K_4(\tau, E_q) - K_4(\tau, E_{1q})\| \leq \xi_4 \|E_q - E_{1q}\| \quad (۲۵)$$

$$\|K_5(\tau, I_s) - K_5(\tau, I_{1s})\| \leq \xi_5 \|I_s - I_{1s}\| \quad (۲۶)$$

$$\|K_6(\tau, I_i) - K_6(\tau, I_{1i})\| \leq \xi_6 \|I_i - I_{1i}\| \quad (۲۷)$$

$$\|K_7(\tau, I_a) - K_7(\tau, I_{1a})\| \leq \xi_7 \|I_a - I_{1a}\| \quad (۲۸)$$

$$\|K_8(\tau, I_{icu}) - K_8(\tau, I_{1icu})\| \leq \xi_8 \|I_{icu}(t) - I_{1icu}(t)\| \quad (۲۹)$$

$$\|K_9(\tau, R) - K_9(\tau, R_1)\| \leq \xi_9 \|R - R_1\| \quad (۳۰)$$

در این روابط ξ_i ($i = 1 \dots 9$) ثابت‌های لیپ‌شیتز بوده و به صورت رابطه‌ی (۳۱) قابل تعریف است. همچنین توابع K_i ($i = 1 \dots 9$) شرایط لیپ‌شیتز را برآورده نموده و تحت شرط بیان شده در رابطه‌ی (۲۰) این توابع انقباضی هستند.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (A_1 \beta_{so} + \mu + (\Omega_3 + \Omega_5 + \Omega_7 + \Omega_9)(\Omega_5 + \eta_a \Omega_7)) \\ \xi_2 &= (\psi_q + \mu) \\ \xi_3 &= ((1-q)p((\Omega_5 + \eta_a \Omega_7)\Omega_1) + (\sigma_u + \alpha_u + \mu)) \\ \xi_4 &= (\sigma_q + \mu) \\ \xi_5 &= (r_s + \phi_s + m_s + \mu) \\ \xi_6 &= (r_i + v_i + m_i + \mu) \\ \xi_7 &= (r_a + v_a + m_a + \mu) \\ \xi_8 &= (r_{icu} + m_{icu} + \mu) \\ \xi_9 &= \mu \end{aligned} \quad (۳۱)$$

حال می‌توان رابطه‌ی (۱۷) را با استفاده از روابط بازگشتی به صورت رابطه‌ی (۳۲) بازنویسی کرد.

$$\begin{cases} S_{n_u}(t) = i(t)K_1(\tau, S_{n-1_u})d\tau \\ S_{n_{sq}}(t) = i(t)K_2(\tau, S_{n-1_{sq}})d\tau \\ E_{n_u}(t) = i(t)K_3(\tau, E_{n-1_u})d\tau \\ E_{n_q}(t) = i(t)K_4(\tau, E_{n-1_q})d\tau \\ I_{n_s}(t) = i(t)K_5(\tau, I_{n-1_s})d\tau \\ I_{n_i}(t) = i(t)K_6(\tau, I_{n-1_i})d\tau \\ I_{n_a}(t) = i(t)K_7(\tau, I_{n-1_a})d\tau \\ I_{n_{icu}}(t) = i(t)K_8(\tau, I_{n-1_{icu}})d\tau \\ R_n(t) = i(t)K_9(\tau, R_{n-1})d\tau \end{cases} \quad (۳۲)$$

شرایط اولیه برای سیستم به صورت تعریف شده در رابطه‌ی (۱۱) است. بنابراین تغییرات^۲ بین دو عبارت را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۳۳) نشان داد.

با توجه به این که $I_i(t), I_s(t), E_q(t), E_u(t), S_{sq}(t), S_u(t), I_{icu}(t), I_a(t)$ و $R(t)$ محدود و نامنفی هستند، فرض می‌شود که مقادیر ثابت Ω_1 تا Ω_9 وجود دارد به گونه‌ای که رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$\begin{aligned} \|S_u(t)\| &\leq \Omega_1; \|S_{sq}(t)\| \leq \Omega_2; \\ \|E_u(t)\| &\leq \Omega_3; \|E_q(t)\| \leq \Omega_5; \\ \|I_s(t)\| &\leq \Omega_6; \|I_i(t)\| \leq \Omega_7; \\ \|I_a(t)\| &\leq \Omega_8; \|R(t)\| \leq \Omega_9. \end{aligned} \quad (۱۹)$$

حال باید نشان داده شود که کرنل‌های K_i ($i = 1 \dots 9$) شرایط لیپ‌شیتز^۱ و نگاشت انقباضی را برآورده می‌کنند که در قضیه‌ی ۲ به آن پرداخته شده است.

قضیه‌ی ۲: توابع K_i ($i = 1 \dots 9$) شرایط لیپ‌شیتز و نگاشت انقباض را برآورده می‌کنند، اگر Φ معرفی شده در رابطه‌ی (۲۰) شرط $0 \leq \Phi < 1$ را برآورده کند.

$$0 \leq \Phi = \max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8, \xi_9\} \quad (۲۰)$$

اثبات: جهت اثبات نخست از تابع K_1 شروع می‌شود. به ازای هر S_u و S_{1u} روابط زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} &\|K_1(\tau, S_u) - K_1(\tau, S_{1u})\| \\ &= \left\| \Lambda - ((1-p) + (1-q)p \right. \\ &\quad + pq) \frac{(I_s(t) + \eta_a I_a(t))S_u}{S_u(t) + E_u(t) + I_s(t) + I_a(t) + R(t)} \\ &\quad + \psi_q S_{sq}(t) - \mu S_u(t) - (\Lambda \\ &\quad - ((1-p) + (1-q)p \\ &\quad + pq) \frac{(I_s(t) + \eta_a I_a(t))S_{1u}}{S_{1u}(t) + E_u(t) + I_s(t) + I_a(t) + R(t)} \\ &\quad \left. + \psi_q S_{sq}(t) - \mu S_{1u}(t)) \right\| \\ &\leq \left\| ((1-p) + (1-q)p \right. \\ &\quad + pq) \beta_{so} \left[\frac{S_u(\Omega_5 + \eta_a \Omega_7)}{S_u(t) + \Omega_3 + \Omega_5 + \Omega_7 + \Omega_9} \right. \\ &\quad \left. - \frac{S_{1u}(\Omega_5 + \eta_a \Omega_7)}{S_{1u}(t) + \Omega_3 + \Omega_5 + \Omega_7 + \Omega_9} \right] + \mu(S_u - S_{1u}) \left\| \right. \\ &\leq \left(((1-p) + (1-q)p + pq) \beta_{so} \mathfrak{S}(x) \right. \\ &\quad \left. + \mu \right) \|S_u - S_{1u}\| \\ &\leq \left(((1-p) + (1-q)p + pq) \beta_{so} + \mu \right. \\ &\quad \left. + (\Omega_3 + \Omega_5 + \Omega_7 + \Omega_9)(\Omega_5 + \eta_a \Omega_7) \right) \|S_u - S_{1u}\| \\ &\leq \xi_1 \|S_u - S_{1u}\| \end{aligned} \quad (۲۱)$$

با توجه به رابطه‌ی فوق روابط زیر نیز برقرار است.

$$\mathfrak{S}(x) = \left\| \|S_u(\Omega_5 + \eta_a \Omega_7)(S_{1u}(t) + \Omega_3 + \Omega_5 + \Omega_7 + \Omega_9) - S_{1u}(\Omega_5 + \eta_a \Omega_7)(S_u(t) + \Omega_3 + \Omega_5 + \Omega_7 + \Omega_9)\| \right\| \left[(S_u(t) + \Omega_3 + \Omega_5 + \Omega_7 + \Omega_9)(S_{1u}(t) + \Omega_3 + \Omega_5 + \Omega_7 + \Omega_9) \right]^{-1} \left\| \right. \quad (۲۲)$$

^۱ Difference

^۲ Lipschitz Condition



$$\begin{cases} \|\Theta_n\| \leq \frac{\xi_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|\Theta_{n-1}\| d\tau \\ \|\Phi_n\| \leq \frac{\xi_3}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|\Phi_{n-1}\| d\tau \\ \|\Psi_n\| \leq \frac{\xi_4}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|\Psi_{n-1}\| d\tau \\ \|\Lambda_n\| \leq \frac{\xi_5}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|\Lambda_{n-1}\| d\tau \\ \|\Xi_n\| \leq \frac{\xi_6}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|\Xi_{n-1}\| d\tau \\ \|\Pi_n\| \leq \frac{\xi_7}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|\Pi_{n-1}\| d\tau \\ \|\varkappa_n\| \leq \frac{\xi_8}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|\varkappa_{n-1}\| d\tau \\ \|\varphi_n\| \leq \frac{\xi_9}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|\varphi_{n-1}\| d\tau \end{cases} \quad (38)$$

بنابراین می‌توان حل یکتای مدل پیشنهادی را اثبات کرد که در قضیه‌ی ۳ به آن پرداخته شده است.

قضیه‌ی ۳: الف) توابع تعریف شده در رابطه‌ی (۳۵) موجود و هموار هستند. ب) اگر $t_0 > 1$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $t_0 < 1 \frac{\xi_i}{\Gamma(\alpha)}$ ($i = 1 \dots 9$) آن‌گاه حداقل یک راه حل برای سیستم رابطه‌ی (۸) وجود دارد.

اثبات: الف) از آن‌جا که توابع $S_u(t)$, $S_{sq}(t)$, $E_u(t)$, $E_q(t)$, $I_s(t)$, $I_a(t)$, $I_i(t)$, $I_{icu}(t)$ و $R(t)$ محدود بوده و هر کدام از کرنل‌های K_i ($i = 1 \dots 9$) شرایط لیپ‌شیتز را برآورده می‌کنند، رابطه‌ی (۳۹) با استفاده از روش بازگشتی به دست آمده است.

$$\begin{cases} \|\Upsilon_n\| \leq \|S_u(0)\| \left\| \frac{\xi_1}{\Gamma(\alpha)} t \right\|^n \\ \|\Theta_n\| \leq \|S_{sq}(0)\| \left\| \frac{\xi_2}{\Gamma(\alpha)} t \right\|^n \\ \|\Phi_n\| \leq \|E_u(0)\| \left\| \frac{\xi_3}{\Gamma(\alpha)} t \right\|^n \\ \|\Psi_n\| \leq \|E_q(0)\| \left\| \frac{\xi_4}{\Gamma(\alpha)} t \right\|^n \\ \|\Lambda_n\| \leq \|I_s(0)\| \left\| \frac{\xi_5}{\Gamma(\alpha)} t \right\|^n \\ \|\Xi_n\| \leq \|I_i(0)\| \left\| \frac{\xi_6}{\Gamma(\alpha)} t \right\|^n \\ \|\Pi_n\| \leq \|I_a(0)\| \left\| \frac{\xi_7}{\Gamma(\alpha)} t \right\|^n \\ \|\varkappa_n\| \leq \|I_{icu}(0)\| \left\| \frac{\xi_8}{\Gamma(\alpha)} t \right\|^n \\ \|\varphi_n\| \leq \|R(0)\| \left\| \frac{\xi_9}{\Gamma(\alpha)} t \right\|^n \end{cases} \quad (39)$$

رابطه‌ی (۳۹) وجود و هموار بودن توابع تعریف شده در رابطه‌ی (۳۵) را نشان می‌دهد.

ب) در این قسمت از اثبات نشان داده شده است که توابع $S_u(t)$, $S_{sq}(t)$, $E_u(t)$, $E_q(t)$, $I_s(t)$, $I_a(t)$, $I_i(t)$, $I_{icu}(t)$ و $R(t)$ به حل‌های سیستم رابطه‌ی (۱۷) همگرا می‌شوند. حال عبارت‌های $B1_n(t)$ تا $B9_n(t)$ به عنوان عبارات باقی‌مانده پس از n تکرار تعریف شده به طوری که رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\begin{cases} Y_n = S_{n_u}(t) - S_{n-1_u}(t) = \mathfrak{I}1(t, \tau) \\ \Theta_n = S_{n_{sq}}(t) - S_{n-1_{sq}}(t) = \mathfrak{I}2(t, \tau) \\ \Phi_n = E_{n_u}(t) - E_{n-1_u}(t) = \mathfrak{I}3(t, \tau) \\ \Psi_n = E_{n_q}(t) - E_{n-1_q}(t) = \mathfrak{I}4(t, \tau) \\ \Lambda_n = I_{n_s}(t) - I_{n-1_s}(t) = \mathfrak{I}5(t, \tau) \\ \Xi_n = I_{n_i}(t) - I_{n-1_i}(t) = \mathfrak{I}6(t, \tau) \\ \Pi_n = I_{n_a}(t) - I_{n-1_a}(t) = \mathfrak{I}7(t, \tau) \\ \varkappa_n = I_{n_{icu}}(t) - I_{n-1_{icu}}(t) = \mathfrak{I}8(t, \tau) \\ \varphi_n = R_n(t) - R_{n-1}(t) = \mathfrak{I}9(t, \tau) \end{cases} \quad (33)$$

در رابطه‌ی فوق روابط زیر برقرار است.

$$\begin{cases} \mathfrak{I}1(t, \tau) = i(t)[K_1(\tau, S_{n-1_u}) - K_1(\tau, S_{n-2_u})] d\tau \\ \mathfrak{I}2(t, \tau) = i(t)[K_2(\tau, S_{n-1_{sq}}) - K_2(\tau, S_{n-2_{sq}})] d\tau \\ \mathfrak{I}3(t, \tau) = i(t)[K_3(\tau, E_{n-1_u}) - K_3(\tau, E_{n-2_u})] d\tau \\ \mathfrak{I}4(t, \tau) = i(t)[K_4(\tau, E_{n-1_q}) - K_4(\tau, E_{n-2_q})] d\tau \\ \mathfrak{I}5(t, \tau) = i(t)[K_5(\tau, I_{n-1_s}) - K_5(\tau, I_{n-2_s})] d\tau \\ \mathfrak{I}6(t, \tau) = i(t)[K_6(\tau, I_{n-1_i}) - K_6(\tau, I_{n-2_i})] d\tau \\ \mathfrak{I}7(t, \tau) = i(t)[K_7(\tau, I_{n-1_a}) - K_7(\tau, I_{n-2_a})] d\tau \\ \mathfrak{I}8(t, \tau) = i(t)[K_8(\tau, I_{n-1_{icu}}) - K_8(\tau, I_{n-2_{icu}})] d\tau \\ \mathfrak{I}9(t, \tau) = i(t)[K_9(\tau, R_{n-1}) - K_9(\tau, R_{n-2})] d\tau \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} S_{n_u}(t) = \sum_{i=0}^n Y_n \\ S_{n_{sq}}(t) = \sum_{i=0}^n \Theta_n \\ E_{n_u}(t) = \sum_{i=0}^n \Phi_n \\ E_{n_q}(t) = \sum_{i=0}^n \Psi_n \\ I_{n_s}(t) = \sum_{i=0}^n \Lambda_n \\ I_{n_i}(t) = \sum_{i=0}^n \Xi_n \\ I_{n_a}(t) = \sum_{i=0}^n \Pi_n \\ I_{n_{icu}}(t) = \sum_{i=0}^n \varkappa_n \\ R_n(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_n \end{cases} \quad (35)$$

با اعمال نرم به طرفین اولین عبارت رابطه‌ی (۳۳) رابطه‌ی زیر به دست آمده است.

$$\begin{aligned} \|\Upsilon_n\| &= \|S_{n_u}(t) - S_{n-1_u}\| = \\ & \|\mathfrak{I}(t, \tau)[K_1(\tau, S_{n-1_u}) - K_1(\tau, S_{n-2_u})] d\tau\| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|(t-\tau)^{\alpha-1} [K_1(\tau, S_{n-1_u}) \\ & \quad - K_1(\tau, S_{n-2_u})]\| d\tau \end{aligned} \quad (36)$$

با استفاده از شرط لیپ‌شیتز رابطه‌ی (۳۷) حاصل شده است.

$$\|\Upsilon_n\| \leq \frac{\xi_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|\Upsilon_{n-1}\| d\tau. \quad (37)$$

به طور مشابه برای سایر عبارت‌های رابطه‌ی (۳۳) روابط زیر به دست آمده است.

اثبات: فرض کنید $S_{1u}(t)$, $E_{1u}(t)$, $S_{1sq}(t)$, $I_{1s}(t)$, $I_{1i}(t)$, $I_{1a}(t)$, $I_{1icu}(t)$ و $R_1(t)$ حل دیگری از سیستم رابطه‌ی (۱۷) باشد، آن‌گاه با استفاده از شرط لیب‌شیتز رابطه‌ی زیر حاصل شده است.

$$\|S_u(t) - S_{1u}(t)\| = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [K_1(\tau, S_u) - K_1(\tau, S_{1u})] d\tau \right\| \leq \frac{\xi_1}{\Gamma(\alpha)} t \|S_u - S_{1u}\| \quad (۴۶)$$

با انتقال طرفین نامساوی فوق به یک طرف، رابطه‌ی (۴۷) به دست آمده است.

$$\|S_u(t) - S_{1u}(t)\| \left(1 - \frac{\xi_1}{\Gamma(\alpha)} t\right) \leq 0 \quad (۴۷)$$

با استفاده از فرض $1 - \frac{\xi_1}{\Gamma(\alpha)} t > 0$ ، از رابطه‌ی (۴۷) نتیجه شده است.

$$\|S_u(t) - S_{1u}(t)\| = 0$$

رابطه‌ی فوق به معنای برقراری رابطه‌ی زیر است.

$$S_u(t) = S_{1u}(t)$$

به صورت مشابه برای سایر ترم‌های $S_{1sq}(t)$, $E_{1u}(t)$, $E_{1q}(t)$, $I_{1s}(t)$, $I_{1i}(t)$, $I_{1a}(t)$, $I_{1icu}(t)$ و $R_1(t)$ نیز روابط زیر برقرار است.

$$\begin{cases} S_{sq}(t) = S_{1sq}(t) \\ E_u(t) = E_{1u}(t) \\ E_{1q}(t) = E_{1q}(t) \\ I_s(t) = I_{1s}(t) \\ I_i(t) = I_{1i}(t) \\ I_a(t) = I_{1a}(t) \\ I_{icu}(t) = I_{1icu}(t) \\ R(t) = R_1(t) \end{cases} \quad (۴۸)$$

نتیجه‌ی به دست آمده نشان می‌دهد که مدل مرتبه‌ی کسری رابطه‌ی (۱۷) دارای یک راه حل یکتا است و بدین صورت اثبات کامل می‌شود.

۵- شبیه‌سازی

در این بخش مدل‌های مرتبه‌ی صحیح و مرتبه‌ی کسری پیشنهادی که به ترتیب در روابط (۶) و (۸) بیان شده با استفاده از اطلاعات واقعی بیماری کووید-۱۹ مربوط به کشور تایلند شبیه‌سازی و بررسی شده است. شرایط اولیه‌ی مدل مشابه مرجع [۱۷] و به صورت ارائه شده در جدول (۲) است.

$$\begin{cases} S_u(t) - S_u(0) = S_{n_u}(t) - B_{1n}(t) \\ S_{sq}(t) - S_{sq}(0) = S_{n_{sq}}(t) - B_{2n}(t) \\ E_u(t) - E_u(0) = E_{n_u}(t) - B_{3n}(t) \\ E_q(t) - E_q(0) = E_{n_q}(t) - B_{4n}(t) \\ I_s(t) - I_s(0) = I_{n_s}(t) - B_{5n}(t) \\ I_i(t) - I_i(0) = I_{n_i}(t) - B_{6n}(t) \\ I_a(t) - I_a(0) = I_{n_a}(t) - B_{7n}(t) \\ I_{icu}(t) - I_{icu}(0) = I_{n_{icu}}(t) - B_{8n}(t) \\ R(t) - R(0) = R_n(t) - B_{9n}(t) \end{cases} \quad (۴۰)$$

با استفاده از نامساوی مثلثی و شرط لیب‌شیتز برای کرنل $B_{1n}(t)$ رابطه‌ی زیر به دست آمده است.

$$\|B_{1n}(t)\| = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [K_1(\tau, S_u) - K_1(\tau, S_{n-1_u})] d\tau \right\| \leq \frac{\xi_1}{\Gamma(\alpha)} \|S_u - S_{n-1_u}\| t \quad (۴۱)$$

با تکرار روش فوق به صورت بازگشتی و بهره‌گیری از رابطه‌ی (۱۹) رابطه‌ی زیر به دست آمده است.

$$\|B_{1n}(t)\| \leq \left\| \frac{\xi_1}{\Gamma(\alpha)} t \right\|^{n+1} \Omega_1 \quad (۴۲)$$

آن‌گاه در یک رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\|B_{1n}(t)\| \leq \left\| \frac{\xi_1}{\Gamma(\alpha)} t_0 \right\|^{n+1} \Omega_1 \quad (۴۳)$$

با گرفتن حد از رابطه‌ی فوق رابطه‌ی (۴۴) حاصل شده است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{1n}(t)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\xi_1}{\Gamma(\alpha)} t_0 \right\|^{n+1} \Omega_1 \quad (۴۴)$$

با استفاده از فرض $\frac{\xi_1}{\Gamma(\alpha)} t_0 < 1$ و میل دادن n به سمت بی‌نهایت، رابطه‌ی (۴۴) به $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{1n}(t)\| \rightarrow 0$ همگرا شده است. به طور مشابه و با تکرار روش فوق برای کرنل‌های $B_{in}(t)$ ($i = 1 \dots 9$) در رابطه‌ی (۴۰) روابط زیر به دست آمده است.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{2n}(t)\| \rightarrow 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{6n}(t)\| \rightarrow 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{3n}(t)\| \rightarrow 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{7n}(t)\| \rightarrow 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{4n}(t)\| \rightarrow 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{8n}(t)\| \rightarrow 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{5n}(t)\| \rightarrow 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{9n}(t)\| \rightarrow 0 \end{cases} \quad (۴۵)$$

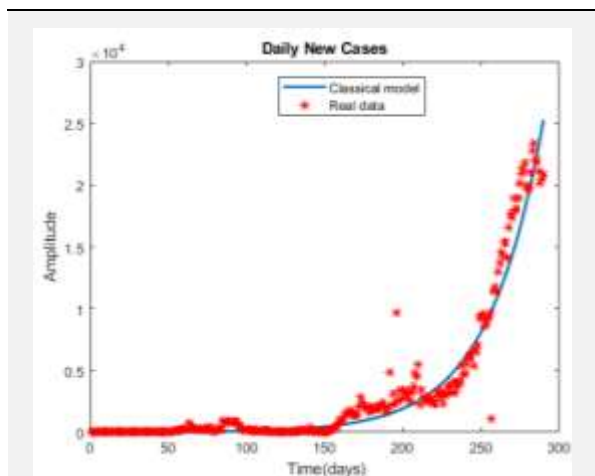
بنابراین حداقل یک راه حل از سیستم مرتبه‌ی کسری وجود دارد و اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۴: اگر شرط زیر برقرار باشد آن‌گاه سیستم رابطه‌ی (۱۷) دارای راه حل یکتایی است.

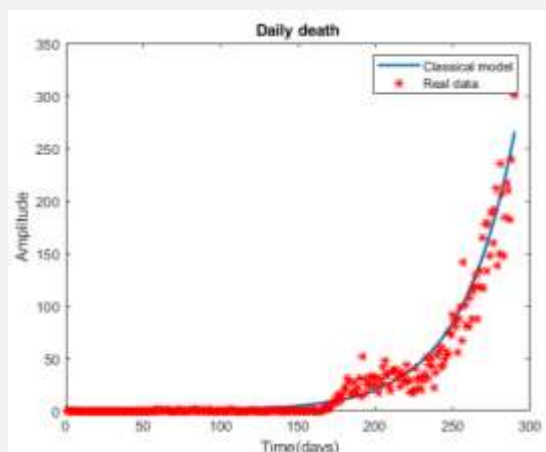
$$\left(1 - \frac{\xi_i}{\Gamma(\alpha)} t\right) > 0 \quad i = 1 \dots 9$$



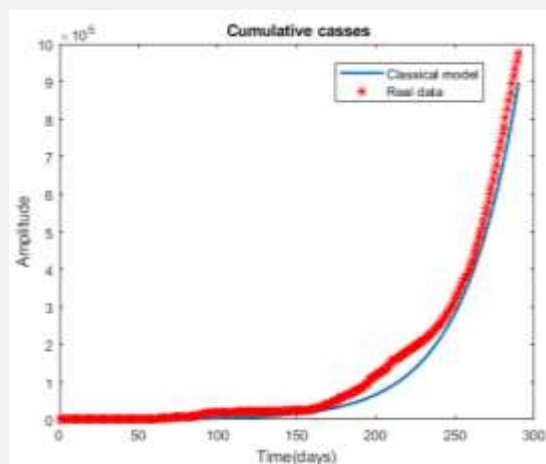
دست آمده که نشان دهنده‌ی همه‌گیری بیماری است. شکل‌های (۴) تا (۶) نیز تاییدی بر نتایج حاصل از محاسبه و تحلیل عدد باز تولید اساسی هستند.



شکل (۱) - تعداد موارد جدید آلوده‌ی روزانه‌ی واقعی و پاسخ مدل مرتبه‌ی صحیح



شکل (۲) - تعداد موارد مرگ و میر روزانه‌ی واقعی و پاسخ مدل مرتبه‌ی صحیح



شکل (۳) - تعداد کل مبتلایان به بیماری در کشور تا بلند و پاسخ مدل مرتبه‌ی صحیح

جدول (۲) - شرایط اولیه‌ی جمعیت

مقدار	پارامتر
۶۶۱۸۹۹۸۱	$S_H(0)$
۰	$S_{sq}(0)$
۱۵	$E_H(0)$
۰	$E_q(0)$
۱	$I_S(0)$
۰	$I_I(0)$
۳	$I_a(0)$
۰	$I_{icu}(0)$
۰	$R(0)$
۰	$D(0)$

در مرجع [۲۲] تعداد مبتلایان روزانه و موارد مرگ و میر ناشی از بیماری کووید-۱۹ در بازه‌ی زمانی ۱ نوامبر ۲۰۲۰ تا ۱۹ آگوست ۲۰۲۱ برای کشور تایلند گزارش شده که در این حالت پاسخ مدل مرتبه‌ی صحیح در رابطه‌ی (۵) نسبت به اطلاعات واقعی در شکل‌های (۱) تا (۳) نشان داده شده است. شکل (۱) مربوط به تعداد مبتلایان جدید روزانه بوده که در آن آمار واقعی با ستاره و پاسخ مدل صحیح به صورت خط آبی رنگ نشان داده شده است. شکل (۲) مربوط به تعداد مرگ و میر روزانه‌ی ناشی از بیماری در مدت زمان ۲۹۰ روز است. شکل (۳) نیز مربوط به تعداد کل مبتلایان به بیماری در بازه‌ی زمانی ذکر شده در کشور تایلند است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود مدل مرتبه‌ی صحیح توانسته است آمار واقعی نحوه‌ی شیوع بیماری همه‌گیر کووید-۱۹ را به خوبی توصیف کند.

پاسخ مدل مرتبه‌ی کسری به ازای مرتبه‌های مختلف مشتق کپوتو جهت توصیف آمار تعداد مبتلایان جدید روزانه در شکل (۴) ارائه شده است. تعداد مرگ و میر روزانه‌ی ناشی از بیماری کووید-۱۹ و تعداد کل مبتلایان به بیماری نیز به ترتیب در شکل‌های (۵) و (۶) نشان داده شده است.

با توجه به شکل‌های (۴) تا (۶) مشاهده می‌شود که سیستم مرتبه‌ی کسری نیز توانسته آمار تعداد مبتلایان جدید روزانه، تعداد موارد مرگ و میر روزانه و تعداد کل مبتلایان به بیماری کووید-۱۹ در کشور تایلند که آمار واقعی آن با ستاره‌های قرمز رنگ مشخص شده است را به ازای مرتبه‌های مختلف مشتق کپوتو توصیف نماید.

با توجه به شکل‌های (۱) تا (۶) ملاحظه می‌شود که سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح و کسری هر دو نسبت به آمار واقعی توانسته‌اند نحوه‌ی شیوع بیماری کووید-۱۹ را به خوبی توصیف کنند.

با توجه به رابطه‌ی (۱۶) و مقادیر ارائه شده در جدول (۱)، عدد باز تولید اساسی مدل بیان شده در رابطه‌ی (۸) برابر با $1/23$ به

توجه به مرجع [۲۳] روابط خطای مطلق و انحراف معیار به صورت رابطه‌ی (۴۹) است.

$$A.E = |v - v_{approx}|$$

$$S.D = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (49)$$

در این رابطه N تعداد نمونه‌های اندازه‌گیری، v مقدار واقعی، v_{approx} مقدار اندازه‌گیری شده، x_i مقدار مشاهده شده از هر نمونه و \bar{x} مقدار میانگین مشاهدات است.

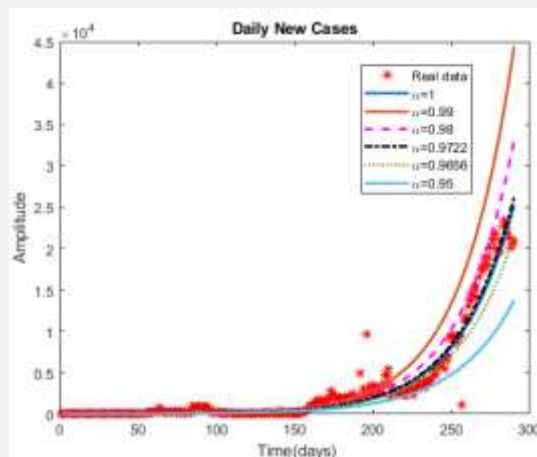
با توجه به رابطه‌ی (۴۹) میزان انحراف معیار میانگین خطای مطلق سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح و کسری نسبت به آمار واقعی تعداد مبتلایان جدید روزانه، موارد جدید مرگ و میر ناشی از بیماری و مجموع کل مبتلایان به بیماری به ترتیب در شکل‌های (۷) تا (۹) نشان داده شده است.

با توجه به شکل‌های (۷) تا (۹) ملاحظه می‌شود که سیستم مرتبه‌ی کسری به ازای مرتبه‌ی مشتق‌گیری $\alpha = 0.9722$ در هر سه حالت میزان انحراف معیار میانگین خطای مطلق کم‌تری نسبت به سیستم مرتبه‌ی صحیح دارد و این بیان‌گر آن بوده که سیستم مرتبه‌ی کسری نسبت به سیستم مرتبه‌ی صحیح توانسته است با دقت بیش‌تری رفتار بیماری کووید-۱۹ برای داده‌های موجود را مدل‌سازی کند.

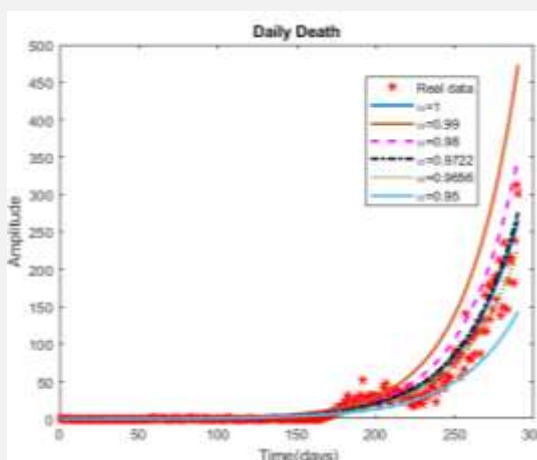
با توجه به طیف وسیع موجود برای انتخاب مرتبه‌ی مدل در حوزه‌ی حسابان کسری، تغییر داده‌ها برای بازه‌ی زمانی دیگر یا کشوری دیگر ممکن است منجر به تغییر مرتبه‌ی کسری مناسب برای مدل شود. از این رو به استناد پژوهش‌های مختلف قطعاً به کارگیری حسابان کسری با داشتن دقت و درجه‌ی آزادی بیش‌تر در انتخاب بهتر مرتبه‌ی سیستم تأثیرگذار است.

۶- جمع‌بندی

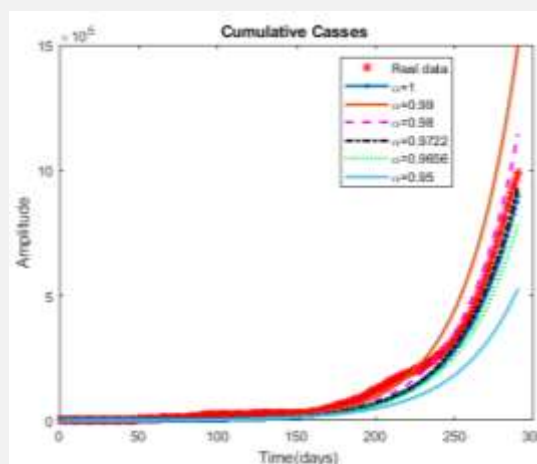
در این مطالعه بسط مدل مرتبه‌ی صحیح ارائه شده برای توصیف بیماری کووید-۱۹ با استفاده از تعریف مشتق مرتبه‌ی کسری کیپوتو به حوزه‌ی حسابان کسری انجام شده است. با استفاده از قضیه‌ی ناحیه‌ی ثابت، محدود و غیرمنفی بودن پاسخ‌های مدل مرتبه‌ی کسری پیشنهادی اثبات شده است. همچنین با استفاده از تئوری نقطه‌ی ثابت، وجود و یکتایی پاسخ مدل مرتبه‌ی کسری اثبات شده است. با توجه به اطلاعات واقعی منتشر شده برای کشور تایلند در بازه‌ی زمانی ۲۹۰ روز، هر دو مدل مرتبه‌ی صحیح و کسری جهت توصیف رفتار بیماری نسبت به اطلاعات واقعی شبیه‌سازی و تحلیل شده است. با بهره‌گیری از تعاریف آماری نشان داده شده که مدل مرتبه‌ی



شکل (۴) - نمودار موارد جدید روزانه‌ی آلوده به بیماری واقعی و پاسخ مدل مرتبه‌ی کسری بیماری به ازای مشتقات مختلف



شکل (۵) - نمودار روزانه‌ی مرگ و میر ناشی از بیماری کووید-۱۹ به ازای مرتبه‌های مختلف مشتق‌گیری کسری



شکل (۶) - تعداد کل مبتلایان به بیماری در کشور تایلند و پاسخ مدل مرتبه‌ی کسری به ازای مشتقات مختلف

برای این که بتوان به طور دقیق مشخص کرد که کدام مدل دقیق‌تر و با خطای کم‌تری آمار واقعی را توصیف کرده، به یک رابطه‌ی دقیق ریاضی نیاز است. در این حالت می‌توان از تعاریف آماری خطای مطلق و انحراف معیار استفاده کرد. بنابراین با

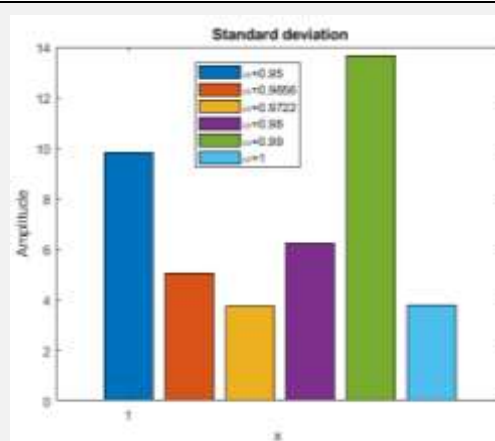


۷- مراجع

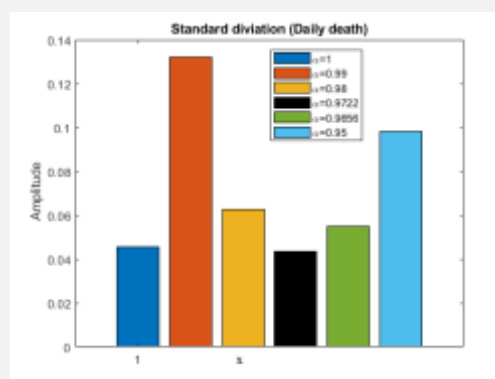
- [1] A. Babakhani, D. Baleanu, and R. P. Agarwal, "The existence and uniqueness of solutions for a class of nonlinear fractional differential equations with infinite delay," in *Abstract and Applied Analysis*, 2013, vol. 2013: Hindawi.
- [2] V. Badri and M. S. Tavazoei, "Stability analysis of fractional order time-delay systems: constructing new Lyapunov functions from those of integer order counterparts," *IET Control Theory & Applications*, vol. 13, no. 15, pp. 2476-2481, 2019.
- [3] W. Chen, H. Dai, Y. Song, and Z. Zhang, "Convex Lyapunov functions for stability analysis of fractional order systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 11, no. 7, pp. 1070-1074, 2017.
- [4] N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud, and J. A. Gallegos, "Lyapunov functions for fractional order systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 19, no. 9, pp. 2951-2957, 2014.
- [5] "COVID-19 Coronavirus Pandemic. 2020." <https://www.worldometers.info/coronavirus/repro>, (accessed March 26).
- [6] M. A. Aba Oud, A. Ali, H. Alrabaiiah, S. Ullah, M. A. Khan, and S. Islam, "A fractional order mathematical model for COVID-19 dynamics with quarantine, isolation, and environmental viral load," *Advances in Difference Equations*, vol. 2021, no. 1, pp. 1-19, 2021.
- [7] N. H. Tuan, H. Mohammadi, and S. Rezapour, "A mathematical model for COVID-19 transmission by using the Caputo fractional derivative," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 140, p. 110107, 2020.
- [8] A. H. A. Mehra, M. Shafieirad, Z. Abbasi, I. Zamani, and Z. Aarabi, "Fuzzy Sliding Mode Controller Design and Analysis of an SQEIR Epidemic Model for COVID-19 to Determine the Quarantine Rate," *Journal of Control*, vol. 14, no. 5, pp. 59-70, 2021.
- [9] S. E. Eikenberry et al., "To mask or not to mask: Modeling the potential for face mask use by the general public to curtail the COVID-19 pandemic," *Infectious disease modelling*, vol. 5, pp. 293-308, 2020.
- [10] F. Ndaïrou, I. Area, J. J. Nieto, and D. F. Torres, "Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 135, p. 109846, 2020.
- [11] K. Sarkar, S. Khajanchi, and J. J. Nieto, "Modeling and forecasting the COVID-19 pandemic in India," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 139, p. 110049, 2020.
- [12] M. Serhani and H. Labbardi, "Mathematical modeling of COVID-19 spreading with asymptomatic infected and interacting peoples," *Journal of Applied Mathematics and Computing*, vol. 66, no. 1, pp. 1-20, 2021.

کسری پیشنهادی دارای دقت بیش‌تری نسبت به مدل مرتبه‌ی صحیح معرفی شده در مرجع [۱۷] است.

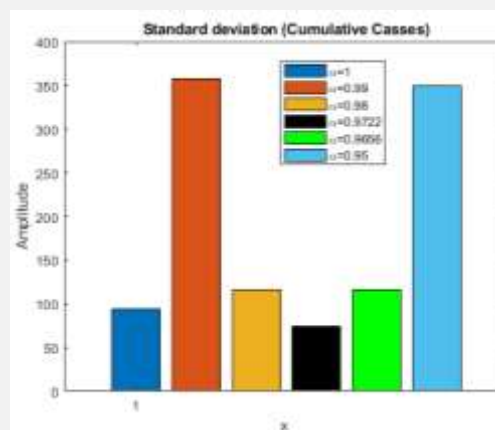
با توجه به تعریف عدد بازتولید اساسی و شبیه‌سازی نتایج به دست آمده، ملاحظه می‌شود که بیماری در حال میل به نقطه‌ی تعادل همه‌گیری و رشد است، بنابراین اقدامات کنترلی نظیر واکسیناسیون، استفاده از ماسک و غیره که در عمل قابلیت کاهش و کنترل نرخ شیوع بیماری را دارند باید انجام شود.



شکل (۷) - میزان انحراف معیار سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح و کسری نسبت به آمار واقعی تعداد مبتلایان جدید روزانه



شکل (۸) - میزان انحراف معیار سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح و کسری نسبت به آمار واقعی تعداد موارد مرگ و میر روزانه



شکل (۹) - میزان انحراف معیار سیستم‌های مرتبه‌ی صحیح و کسری نسبت به آمار واقعی تعداد کل مبتلایان به بیماری



- [18] P. van den Driessche and J. Watmough, "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission," *Mathematical Biosciences*, vol. 180, no. 1, pp. 29-48, 2002/11/01/ 2002.
- [19] M. Yavuz, F. Ö. Coşar, F. Günay, and F. N. Özdemir, "A new mathematical modeling of the COVID-19 pandemic including the vaccination campaign," *Open Journal of Modelling and Simulation*, vol. 9, no. 3, pp. 299-321, 2021.
- [20] S. O. Akindeinde, E. Okyere, A. O. Adewumi, R. S. Lebelo, O. O. Fabelurin, and S. E. Moore, "Caputo fractional-order SEIRP model for COVID-19 Pandemic," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 61, no. 1, pp. 829-845, 2022.
- [21] A. Omame, U. K. Nwajeri, M. Abbas, and C. P. Onyenegecha, "A fractional order control model for Diabetes and COVID-19 co-dynamics with Mittag-Leffler function," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 61, no. 10, pp. 7619-7635, 2022/10/01/ 2022.
- [22] Department Of Disease Control. COVID-19 Infected Situation Reports. [Online]. Available: <https://ddc.moph.go.th/viralpneumonia/eng/index.php> (accessed on 11 May 2021).
- [23] https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation (accessed).
- [13] M. A. Bahloul, A. Chahid, and T.-M. Laleg-Kirati, "Fractional-order SEIQRDP model for simulating the dynamics of COVID-19 epidemic," *IEEE Open Journal of Engineering in Medicine and Biology*, vol. 1, pp. 249-256, 2020.
- [14] M. A. Khan and A. Atangana, "Modeling the dynamics of novel coronavirus (2019-nCov) with fractional derivative," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 59, no. 4, pp. 2379-2389, 2020.
- [15] S. Ahmad, A. Ullah, Q. M. Al-Mdallal, H. Khan, K. Shah, and A. Khan, "Fractional order mathematical modeling of COVID-19 transmission," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 139, p. 110256, 2020.
- [16] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Elsevier Science, 1998.
- [17] J. Jankhonkhan and W. Sawangtong, "Model predictive control of COVID-19 pandemic with social isolation and vaccination policies in Thailand," *Axioms*, vol. 10, no. 4, p. 274, 2021.